

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной математики

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе  
по направлению подготовки 08.03.01 Строительство*


Составитель Ж.Г. Могилюк

© Национальный исследовательский  
Московский государственный  
строительный университет, 2020

Москва  
Издательство МИСИ – МГСУ  
2020

УДК 624.04  
ББК 38.5:30.121  
С64

*Рецензент* — доцент, доктор технических наук *Л.Ю. Фриштер*,  
профессор кафедры прикладной математики НИУ МГСУ

С64 **Сопротивление материалов** [Электронный ресурс] :  Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по направлению подготовки 08.03.01 Строительство / сост. Ж.Г. Могилюк ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра прикладной математики. — Электрон. дан. и прогр. (1,9 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2020. — Режим доступа: <http://lib.mgsu.ru/> — Загл. с титул. экрана.

Методические указания посвящены разделу курса «Сопротивление материалов», содержат краткие теоретические сведения по указанному разделу, основные формулы и примеры решения задач. Предназначены для оказания методической помощи студентам по направлению подготовки 08.03.01 Строительство при выполнении расчетно-графических работ, подготовке к практическим занятиям и мероприятиям промежуточной аттестации.

*Учебное электронное издание*

© Национальный исследовательский  
Московский государственный  
строительный университет, 2020

Редактор, корректор *Л.И. Ильина*  
Компьютерная верстка *С.А. Глембовецкого*  
Дизайн первого титульного экрана *Д.Л. Разумного*

*Для создания электронного издания использовано:*  
Microsoft Word 2010, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию **00.00.2020**. Объем данных 1,9 Мб.

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Московский государственный строительный университет»  
129337, Москва, Ярославское ш., 26

Издательство МИСИ – МГСУ  
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95  
E-mail: [ric@mgsu.ru](mailto:ric@mgsu.ru), [rio@mgsu.ru](mailto:rio@mgsu.ru)

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ .....	5
Глава 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ.....	7
Глава 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ (МЕТОДОМ МОРА) .....	14
Глава 3. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.....	28
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	32

## ВВЕДЕНИЕ

В процессе проектирования любого строительного объекта необходимо сделать: выбор материала и размеров каждой конструкции так, чтобы в процессе эксплуатации они не разрушились и не изменили своей формы.

Принятые проектные и конструктивные решения должны быть обоснованы результатами расчета как отдельных конструктивных элементов и соединений, так и зданий и сооружений в целом.

Надежность строительного объекта — способность строительного объекта выполнять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации.

Для обеспечения надежности строительных конструкций зданий и сооружений должны быть выполнены расчеты на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочностью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, не разрушаясь.

Жесткостью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, получая лишь малые упругие деформации.

Устойчивостью называется способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием приложенных сил.

С целью обеспечения надежности как отдельных строительных конструкций, так и зданий и сооружений в целом основной задачей расчетного проектирования является ограничение напряжений и деформаций в конструкциях, обеспечивающих безотказную эксплуатацию, т.е. напряжения и деформации, возникающие в конструкциях, должны быть ниже предельных значений, при которых может произойти разрушение.

В рамках курса «Сопротивление материалов» предусмотрено освоение студентами основных принципов и методов расчета строительных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчетно-графические работы составляют часть самостоятельной работы студентов и предназначены для закрепления учебного материала, излагаемого на лекциях и практических занятиях по курсу дисциплины, способствуя развитию у студентов навыков самостоятельного решения задач расчета элементов строительных конструкций, поиску оптимальных решений и научного подхода к решению поставленных задач.

Расчетно-графические работы должны выполняться в следующей последовательности:

- проработка учебного материала по теме расчетно-графической работы по конспекту лекций и практических занятий, а также по рекомендуемой литературе и методическим указаниям;
- решение задач, входящих в расчетно-графическую работу;
- проведение консультаций с преподавателем, проводящим практические занятия в группе;
- исправление ошибок (если они имеются), указанных преподавателем во время консультаций;
- оформление расчетно-графической работы в виде пояснительной записки, содержащей расчетный и графический материал;
- защита расчетно-графической работы, получение подписи преподавателя с указанием даты защиты.

Решение расчетно-графической работы должно сопровождаться краткими, последовательными объяснениями и схемами. Расчеты рекомендуется вести в общем виде. Вычисления должны выполняться с обязательным указанием размерности полученных результатов. В расчетах следует использовать принятую государственным стандартом Международную систему единиц (СИ).

Для большей наглядности результаты расчетов следует представлять в виде графиков, называемых эпюрами. Графики должны быть выполнены в масштабе, обеспечивающем наилучшую наглядность и возможность сопоставления результатов.

Расчетно-графическая работа оформляется от руки или в виде компьютерного набора на листах формата А4 с закрепленным степлером титульным листом, на котором обязательно указывается наименование дисциплины, наименование соответствующего раздела дисциплины, ФИО преподавателя, ФИО, курс и группа студента. Для оформления работы используются только лицевые стороны листов, использование оборотной стороны листов не допускается.

Оформление задачи следует начинать с текста условия, включая все числовые данные и схемы заданной системы.

Последующее оформление следует вести в соответствии с планом решения задачи. Все чертежи и схемы рекомендуется выполнять карандашом, а записи — ручкой.

При построении эпюр необходимо размещать материал таким образом, чтобы расчетная схема конструкции и эпюры располагались на одной странице, избегая перехода эпюр на другую страницу.

Все расчетные выкладки должны представлять собой стройную логическую цепочку и сопровождаться пояснительным текстом.

## **Определение перемещений в статически определимых стержневых системах**

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны оси кривого бруса. Осью бруса называется геометрическое место точек центров тяжести поперечных сечений бруса, т.е. сечений, нормальных к оси бруса. Стержень, работающий на изгиб, называется балкой.

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При этом точки оси получают поперечные перемещения или прогибы, а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей. Углы поворота поперечных сечений принимаются равными углам наклона касательной к изогнутой оси балки. Угол наклона касательной к изогнутой оси балки положителен, если при совмещении оси балки с касательной идет движение по часовой стрелке.

Прогибы и углы поворота в балках часто называются линейными и угловыми перемещениями. Прогибы и углы поворота в балках являются переменными величинами, т.е. функциями координаты  $x$ .

Для вычисления прогибов и углов поворота используются два основных метода: метод начальных параметров (метод академика А.Н. Крылова) и графоаналитический метод (метод Мора).

## Глава 1

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Согласно методу начальных параметров, балка под действием рассматриваемых сил находится в равновесии. Балка разбивается на грузовые участки. Начало координат располагается в крайней левой точке балки. Начальными параметрами являются прогиб ( $y_0$ ), угол поворота ( $\varphi_0$ ), поперечная сила ( $Q_0$ ) и изгибающий момент ( $M_0$ ) в начале координат.

В общем виде для любого сочетания нагрузок, а также учитывая, что  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = n!$ , обобщенное универсальное уравнение прогибов (не обращая внимания на знаки, т.е. все слагаемые взяты со знаком «+») запишется в виде:

$$EIy = EIy_0 + EI\varphi_0x + \frac{M_0x^2}{2!} + \frac{Q_0x^3}{3!} + \sum \frac{m(x-a_m)^2}{2!} + \sum \frac{P(x-a_p)^3}{3!} + \sum \frac{q(x-a_q)^4}{4!} - \sum \frac{q(x-b_q)^4}{4!}, \quad (1)$$

где  $M_0$ ,  $Q_0$ ,  $y_0$ ,  $\varphi_0$  — начальные параметры метода;

$E$  — модуль упругости материала балки;

$I$  — момент инерции поперечного сечения балки;

$x$  — координата исследуемой точки по длине балки;

$m$  — сосредоточенный изгибающий момент, действующий на балку в точке с координатой  $a_m$  относительно начала координат;

$P$  — сосредоточенная сила, действующая на балку в точке с координатой  $a_p$  относительно начала координат;  $q$  — распределенная нагрузка, действующая на балку с координатой начала  $a_q$  и координатой конца  $b_q$  относительно начала координат.

Выражение (1) является обобщенным универсальным уравнением прогибов или строчкой Крылова.

Уравнение углов поворота получается путем дифференцирования уравнения прогибов, т.е. уравнения (1), и имеет вид:

$$EIy' = EI\varphi = EI\varphi_0 + \frac{M_0x}{1!} + \frac{Q_0x^2}{2!} + \sum \frac{m(x-a_m)}{1!} + \sum \frac{p(x-a_p)^2}{2!} + \sum \frac{q(x-a_q)^3}{3!} - \sum \frac{q(x-b_q)^3}{3!}. \quad (2)$$

В начале расчета, прежде чем приступить к записи уравнения, необходимо определить реакции опор балки и учитывать их в уравнении как внешние нагрузки  $Q_0$  и  $M_0$ .

Начальные параметры, а именно  $M_0$ ,  $Q_0$ ,  $y_0$ ,  $\varphi_0$ , определяются из граничных условий (условий на опорах). Типичные случаи граничных условий приведены на рис. 1.1.

В случае, приведенном на рис. 1.1а, все начальные параметры известны, можно определить прогиб и угол поворота в любой точке балки.

В случае, приведенном на рис. 1.1б, неизвестен один параметр  $\varphi_0$ . Он определяется из дополнительного условия на опоре  $B$  ( $y = 0$ ). Для этого при  $x = \ell$  записывается уравнение (1), приравнивается нулю и решается относительно единственного неизвестного  $\varphi_0$ . После определения  $\varphi_0$  можно определить прогиб и угол поворота в любой точке балки.

В случае, приведенном на рис. 1.1в, неизвестны 2 параметра  $y_0$  и  $\varphi_0$ , которые определяются из дополнительных условий на опоре  $B$  ( $y = 0$ ,  $\varphi = 0$ ). При  $x = \ell$  записывается уравнение (1), приравнивается нулю и записывается уравнение (2), которое также приравнивается нулю. Решаются полученные уравнения относительно неизвестных  $y_0$  и  $\varphi_0$ . После определения  $y_0$  и  $\varphi_0$  уравнения (1) и (2) позволяют определить прогиб и угол поворота в любой точке по длине балки.

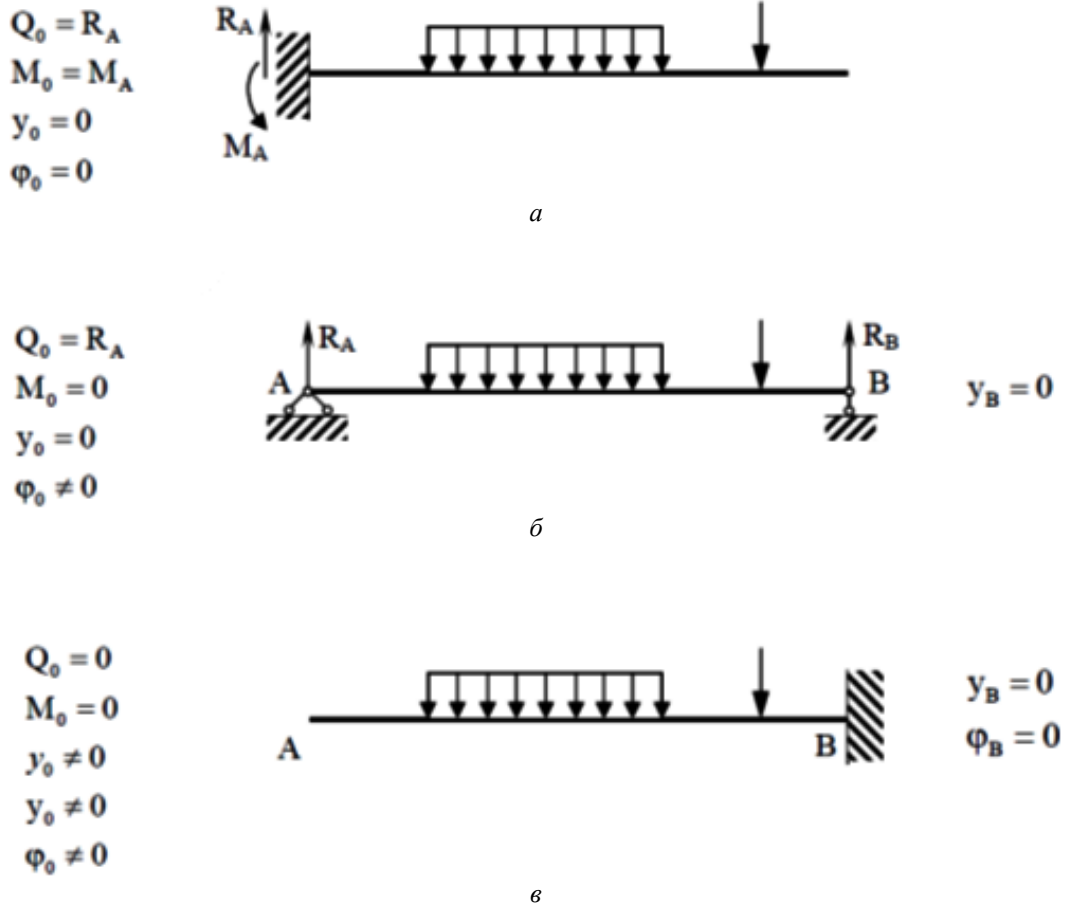


Рис. 1.1

Знак слагаемого в уравнениях (1) и (2) противоположен знаку момента от этой нагрузки.

При записи уравнений удерживаются из универсального уравнения (1) или (2) только слагаемые, стоящие левее рассматриваемой точки.

В случае наличия промежуточного шарнира в балке в уравнении (1) и (2) вводится слагаемое  $\Delta\varphi \cdot (x - a_\varphi)$ , где  $a_\varphi$  — координата расположения промежуточного шарнира,  $\Delta\varphi$  — скачок угла поворота в промежуточном шарнире.

### Примеры решения задач

#### Задача 1.1

Для консольной балки, изображенной на рис. 1.2, определить прогиб и угол поворота на свободном конце (в точке D).

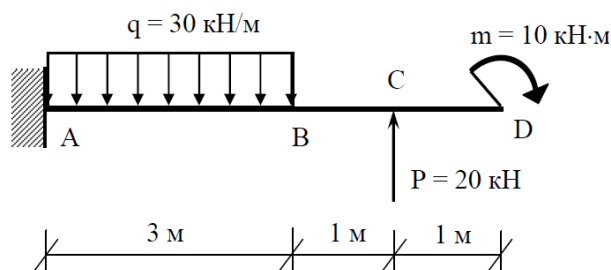


Рис. 1.2

#### Решение задачи

Прежде чем приступить к составлению уравнений прогибов и углов поворота балки, согласно универсальным уравнениям метода (1) и (2), необходимо определить начальные параметры указанных уравнений, а именно прогиб, угол поворота, поперечную силу и изгибающий момент в на-



чале координат. Согласно правилу метода начальных параметров, начало координат помещаем в крайнюю левую точку балки (точка  $A$ ). Используя рис. 1.1, запишем граничные условия для рассматриваемой балки.

В начале координат (крайней левой точке) рассматриваемой балки имеем опору в виде заделки, для которой можем записать:

$$y_0 = 0, \varphi_0 = 0, Q_0 = R_A, M_0 = M_A.$$

Для определения параметров  $Q_0, M_0$  можно записать уравнения равновесия балки или построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, двигаясь от свободного конца к заделке. Построим эпюры (рис. 1.3) и запишем начальные параметры балки:

$$y_0 = 0, \varphi_0 = 0, Q_0 = 70 \text{ кН}, M_0 = 65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

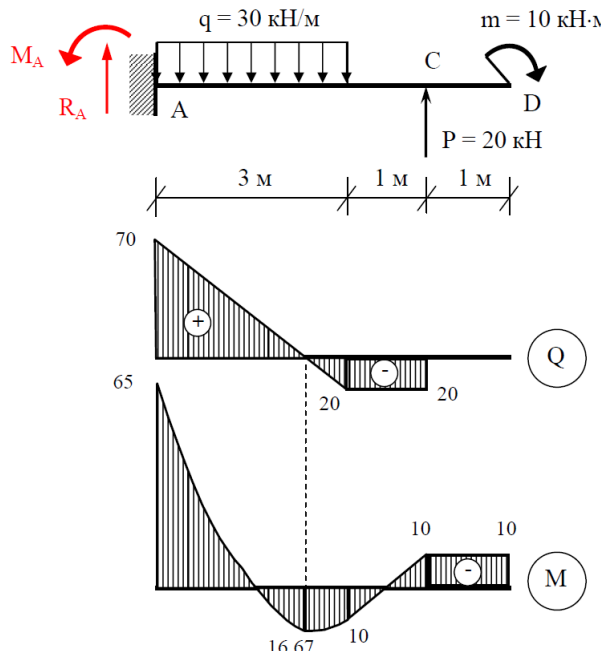


Рис. 1.3

Все четыре начальных параметра определены, а значит, можно записать уравнение искомого прогиба в точке  $D$ . Учитывая правило знаков слагаемых, получим:

$$EI y_D = EI y_0 + EI \varphi_0 x_D + \frac{M_0 x_D^2}{2!} - \frac{Q_0 x_D^3}{3!} + \frac{q(x_D - a_q)^4}{4!} - \frac{q(x_D - b_q)^4}{4!} - \frac{P(x_D - a_p)^3}{3!}.$$

Координата точки  $D$  относительно начала координат  $x_D = 5$  м. Подставив в уравнение известные величины, получим

$$EI y_D = EI \cdot 0 + EI \cdot 0 \cdot 5 + \frac{65 \cdot 5^2}{2!} - \frac{70 \cdot 5^3}{3!} + \frac{30 \cdot (5-0)^4}{4!} - \frac{30 \cdot (5-3)^4}{4!} - \frac{20 \cdot (5-4)^3}{3!}$$

или

$$EI y_D = 812,5 - 1458,33 + 781,25 - 20,0 - 3,33 = 112,09.$$

Искомый прогиб в точке  $D$ :

$$y_D = \frac{112,09}{EI}.$$

Уравнение угла поворота в точке  $D$  запишем, продифференцировав уравнение прогибов для указанной точки:

$$EI\varphi_D = EI\varphi_0 + \frac{M_0 x_D}{1!} - \frac{Q_0 x_D^2}{2!} + \frac{q(x_D - a_q)^3}{3!} - \frac{q(x_D - b_q)^3}{3!} - \frac{P(x_D - a_p)^2}{2!}.$$

Подставив в уравнение известные величины, получим

$$EI\varphi_D = EI \cdot 0 + \frac{65 \cdot 5}{1!} - \frac{70 \cdot 5^2}{2!} + \frac{30 \cdot (5-0)^3}{3!} - \frac{30 \cdot (5-3)^3}{3!} - \frac{20 \cdot (5-4)^2}{2!}$$

или

$$EI\varphi_D = EI \cdot 0 + 325,0 - 875,0 + 625,0 - 40,0 - 10 = 25.$$

Искомый угол поворота в точке  $D$ :

$$\varphi_D = \frac{25}{EI}.$$

### Задача 1.2

Для шарнирно-опертой стальной двутавровой балки 20Б2, изображенной на рис. 1.4, определить прогиб в точке  $D$  и угол поворота в точке  $B$ .

Расчетное сопротивление стали  $R = 210$  МПа.

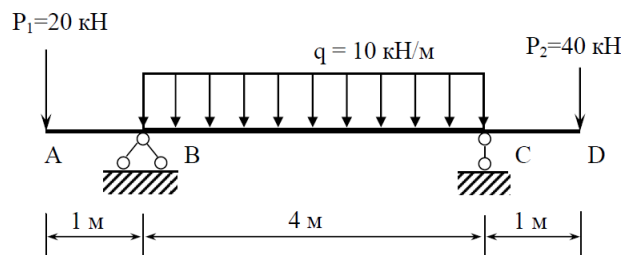


Рис. 1.4

### Решение задачи

Согласно условиям метода, помещаем начало координат в крайнюю левую точку балки, т.е. точку  $A$ . Определяем начальные параметры балки, согласно типовым граничным условиям, приведенным на рис. 1.1.

В крайней левой точке рассматриваемой балки свободный (не закрепленный) конец, а значит, начальные прогиб и угол поворота отличны от нуля, т.е.  $y_0 \neq 0$ ,  $\varphi_0 \neq 0$ . В точке  $A$  приложена сосредоточенная сила  $P_1$ , а значит,  $Q_0 = P_1 = 20$  кН. Так как изгибающий момент в точке  $A$  равен нулю, то  $M_0 = 0$ . Таким образом, из 4 начальных параметров два неизвестны.

Определяем неизвестные начальные параметры, а именно  $y_0$  и  $\varphi_0$  из граничных условий. Граничными условиями для рассматриваемой балки служат условия на опорах. В точке  $B$  и точке  $C$  балки имеют место шарнирные опоры, исключаяющие вертикальные смещения опорных точек балки, а значит, прогиб в точках  $B$  и  $C$  равен нулю, т.е.  $y_B = 0$ ,  $y_C = 0$ .

Прежде чем приступить к определению неизвестных начальных параметров, определим опорные реакции в балке (рис. 1.5) с помощью уравнений равновесия:

$$\sum M_B = 0; \quad -P_1 \cdot 1 + Q \cdot 2 - R_C \cdot 4 + P_2 \cdot 5 = 0,$$

$$R_C = \frac{-P_1 \cdot 1 + Q \cdot 2 + P_2 \cdot 5}{4} = \frac{-20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 5}{4} = 65 \text{ кН},$$

$$\sum M_C = 0; -P_1 \cdot 5 + R_B \cdot 4 - Q \cdot 2 + P_2 \cdot 1 = 0,$$

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 5 + Q \cdot 2 - P_2 \cdot 1}{4} = \frac{20 \cdot 5 + 40 \cdot 2 - 40 \cdot 1}{4} = 35 \text{ кН.}$$

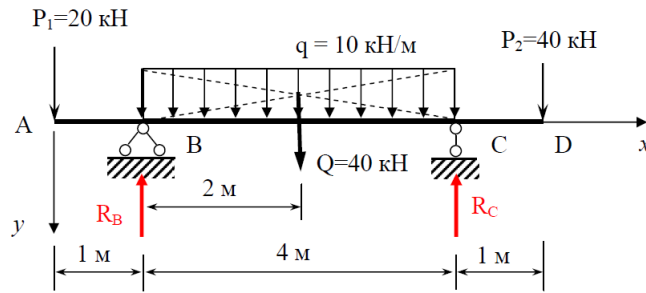


Рис. 1.5

Выполняем проверку:

$$\sum Y = 0; P_1 - R_B + Q - R_C + P_2 = 20 - 35 + 40 - 65 + 40 = 100 - 100 = 0.$$

Проверка по проекциям всех сил на вертикальную ось  $y$  выполнена, а значит, опорные реакции определены верно.

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в балке (рис. 1.6).

$$M(x_m) = -P_1 \cdot (1 + x_m) + R_B \cdot x_m - q \cdot x_m^2 / 2 = -20 \cdot 2,5 + 35 \cdot 1,5 - 10 \cdot 1,5^2 / 2 = -8,75 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

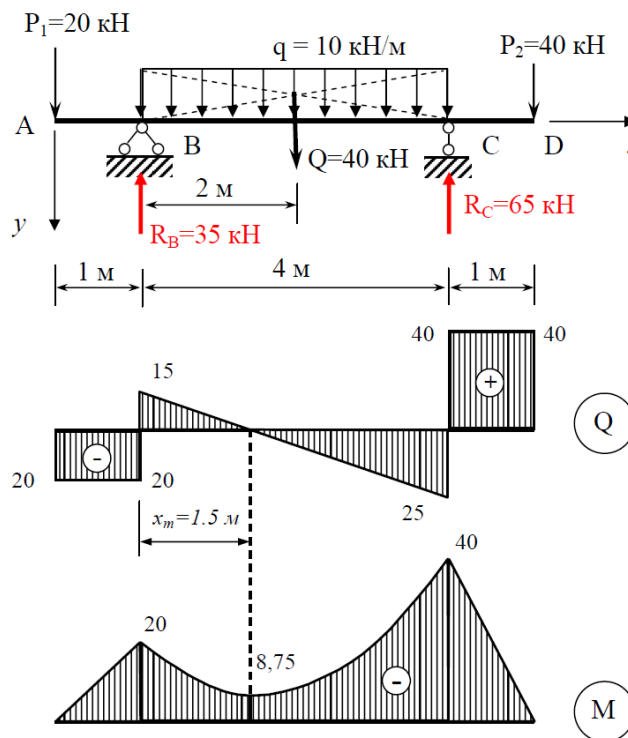


Рис. 1.6

Двутавровая балка 20Б2, согласно ГОСТ Р 57837–2017 Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия, имеет момент инерции поперечного сечения  $I_x = 2218,49 \text{ см}^4 = 2218,49 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ , момент сопротивления сечения  $W_x = 218,6 \text{ см}^3$ .

Условие прочности балки, работающей на изгиб:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq R \cdot \gamma_c.$$

Учитывая, что расчетное сопротивление стали  $R = 210$  МПа, получим

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{40 \cdot 100}{218,6} = 18,3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 183,0 \text{ МПа} < R_{\gamma_c} = 199,5 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполнено.

Запишем на основании универсального уравнения прогибов или строчки Крылова уравнения прогибов для точек  $B$  и  $C$  рассматриваемой балки и приравняем их к нулю. Так как сила  $P_1$  создает относительно точки  $B$  отрицательный момент (растягивая верхние волокна участка балки), то, согласно правилу знаков метода, слагаемое для  $Q_0$  будет иметь противоположный знак, т.е. «+». Слагаемое для  $M_0$  обнуляется, а значит, для точки  $B$ , учитывая только нагрузки, расположенные левее точки  $B$ , получим

$$EIy_B = EIy_0 + EI\varphi_0 x_B + \frac{Q_0 x_B^3}{3!} = 0.$$

Для точки  $C$ , учитывая только нагрузки, расположенные левее точки  $C$ , получим

$$EIy_C = EIy_0 + EI\varphi_0 x_C + \frac{Q_0 x_C^3}{3!} - \frac{R_B (x_C - a_R)^3}{3!} + \frac{q(x_C - a_q)^4}{4!} = 0.$$

Объединяем полученные уравнения в систему, получаем 2 уравнения с 2 неизвестными:

$$\begin{cases} EIy_0 + EI\varphi_0 x_C + \frac{Q_0 x_C^3}{3!} - \frac{R_B (x_C - a_R)^3}{3!} + \frac{q(x_C - a_q)^4}{4!} = 0, \\ EIy_0 + EI\varphi_0 x_B + \frac{Q_0 x_B^3}{3!} = 0. \end{cases}$$

Вычтем из 1-го уравнения системы 2-е уравнение, получим одно уравнение с одним неизвестным  $\varphi_0$ :

$$EI\varphi_0 (x_C - x_B) + \frac{Q_0 (x_C^3 - x_B^3)}{3!} - \frac{R_B (x_C - a_R)^3}{3!} + \frac{q(x_C - a_q)^4}{4!} = 0.$$

Выражаем неизвестный параметр  $\varphi_0$ :

$$EI\varphi_0 = -\frac{Q_0 (x_C^3 - x_B^3)}{(x_C - x_B) \cdot 3!} + \frac{R_B (x_C - a_R)^3}{(x_C - x_B) \cdot 3!} - \frac{q(x_C - a_q)^4}{(x_C - x_B) \cdot 4!}.$$

Подставляем известные величины и получаем величину  $EI\varphi_0$ :

$$EI\varphi_0 = -\frac{20 \cdot (5^3 - 1^3)}{(5-1) \cdot 6} + \frac{35 \cdot (5-1)^3}{(5-1) \cdot 6} - \frac{10 \cdot (5-1)^4}{(5-1) \cdot 24} = -36,667.$$

Из 2-го уравнения системы выражаем  $EIy_0$ :

$$EIy_0 = -EI\varphi_0 x_B - \frac{Q_0 x_B^3}{3!} = -(-36,667 \cdot 1) - \frac{20 \cdot 1^3}{6} = 33,334.$$

Таким образом, определены все 4 начальные параметра:

$$y_0 = \frac{33,334}{EI}; \varphi_0 = -\frac{36,667}{EI}; Q_0 = 20 \text{ кН}; M_0 = 0.$$

После определения начальных параметров вычисляем искомые величины.

Запишем уравнение для искомого угла поворота в точке  $B$  и определим его значение:

$$EI\varphi_B = EIy'_B = EI\varphi_0 + \frac{Q_0 x_B^2}{2!} = -36,667 + \frac{20 \cdot 1^2}{2} = -26,667,$$

$$\varphi_B = -\frac{26,667}{EI} \text{ рад.}$$

Запишем уравнение для искомого прогиба в точке  $D$  и определим его значение:

$$EIy_D = EIy_0 + EI\varphi_0 x_D + \frac{Q_0 x_D^3}{3!} - \frac{R_B (x_D - a_{RB})^3}{3!} + \frac{q(x_D - a_q)^4}{4!} - \frac{q(x_D - b_q)^4}{4!} - \frac{R_C (x_D - a_{RC})^3}{3!},$$

$$EIy_D = 33,334 + (-36,667) \cdot 6 + \frac{20 \cdot 6^3}{6} - \frac{35 \cdot (6-1)^3}{6} + \frac{10 \cdot (6-1)^4}{24} - \frac{10 \cdot (6-5)^4}{24} - \frac{65 \cdot (6-5)^3}{6} = 53,332,$$

$$y_D = \frac{53,332}{EI} \text{ м.}$$

Модуль упругости стали:  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ .

Значит, искомый угол поворота в точке  $B$ :

$$\varphi_B = -\frac{26,667}{EI} = -\frac{26,667}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 2218,49 \cdot 10^{-8}} = -0,0057 \text{ рад.}$$

Искомый прогиб в точке  $D$ :

$$y_D = \frac{53,332}{EI} = \frac{53,332}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 2218,49 \cdot 10^{-8}} = 0,0114 \text{ м} = 1,14 \text{ см.}$$

## Глава 2

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ (МЕТОДОМ МОРА)

При определении перемещений методом Мора рассматривается равенство работы внешних и внутренних сил на вызванных ими перемещениях, при этом каждому виду нагрузки соответствует свое перемещение, на котором она производит работу: сосредоточенной силе соответствует линейное перемещение по направлению ее действия, сосредоточенному моменту — угловое перемещение или угол поворота поперечного сечения стержня, в котором приложен момент.

Для определения любого перемещения (линейного или углового) в методе Мора балка рассматривается в двух состояниях: действительном и вспомогательном.

Состояние балки под действием внешних нагрузок называют грузовым, или действительным состоянием.

Вспомогательное или единичное состояние получается следующим образом: всю заданную внешнюю нагрузку удаляют, затем прикладывают «единичный силовой фактор» в том месте, где требуется определить перемещение, при этом направление «единичного силового фактора» выбирается по направлению этого искомого перемещения. Для определения линейного перемещения (прогиба балки) в качестве «единичного силового фактора» принимается сосредоточенная сила, а для определения угла поворота принимается сосредоточенная пара сил или сосредоточенный момент.

В поперечных сечениях балки, работающей на изгиб, возникают три внутренних усилия — изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и продольная сила  $N$ .

Согласно принципу независимости действия сил, работа каждого усилия может быть вычислена отдельно, после чего, согласно вариационному принципу Лагранжа, суммарная работа всех внешних и внутренних сил на малых возможных перемещениях приравнивается нулю.

В результате для трех внутренних усилий, возникающих в балке при изгибе, формула Мора имеет вид

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^n \int_0^{\ell} \frac{\bar{N}_i \cdot N_p}{E \cdot F} dx + \sum_{j=1}^n \int_0^{\ell} \frac{\bar{M}_i \cdot M_p}{E \cdot I} dx + \sum_{j=1}^n \int_0^{\ell} k \cdot \frac{\bar{Q}_i \cdot Q_p}{G \cdot F} dx, \quad (3)$$

где  $\Delta_{ip}$  — перемещение в  $i$ -й точке;

$\bar{N}_i, \bar{M}_i, \bar{Q}_i$  — внутренние усилия в стержнях, вызванные действием единичной силы  $\bar{P}_i = 1$  или единичного момента  $\bar{M}_i = 1$ , прикладываемых по направлению искомого перемещения;

$N_p, M_p, Q_p$  — усилия в стержнях, возникающие под действием внешних нагрузок, соответствующих грузовому состоянию;

$E$  — модуль упругости материала балки;

$F$  — площадь поперечного сечения балки;

$I$  — момент инерции поперечного сечения балки;

$k$  — безразмерный коэффициент, зависящий от формы сечения балки и учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения изгибаемой балки;

$G$  — модуль упругости материала балки при сдвиге.

Таким образом, для определения с помощью формулы Мора перемещений в балке или стержневой системе в зависимости от заданных внешних нагрузок производится расчет системы на действие внешних нагрузок и определяются усилия  $N_p, M_p, Q_p$  грузового состояния. Затем по направлению искомого перемещения прикладывается единичная сила (для определения прогиба) или единичный момент (для определения угла поворота) и определяются вызываемые их действием внутренние усилия  $\bar{N}_i, \bar{M}_i, \bar{Q}_i$ . После чего выражения для усилий подставляются в формулу (3) и производится интегрирование в пределах длины стержня  $\ell$  и суммирование результатов интегрирования по всем стержням системы.

Если в результате вычислений величина  $\Delta_{ip}$  оказалась положительной, то направление перемещения совпадает с направлением действия единичной нагрузки, а если отрицательной — то оно противоположно этому направлению.

При расчете балок и стержневых систем, работающих в основном на изгиб (например, балок и рам), можно с достаточной степенью точности использовать только слагаемое формулы Мора, содержащее изгибающие моменты:

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \cdot M_p}{E \cdot I} dx. \quad (4)$$

Во многих случаях для определения перемещений в балках интегрирования по формуле Мора можно избежать, применив способ «перемножения» эпюр.

Основными, наиболее часто используемыми способами «перемножения» эпюр для определения перемещений в статически определимых стержневых системах являются способ по правилу Верещагина и способ Симпсона.

Способы «перемножения» эпюр для определения перемещений в статически определимых стержневых системах применимы только при выполнении двух условий:

- 1) изгибная жесткость стержневой системы на рассматриваемом участке должна быть постоянной ( $E \cdot I = \text{const}$ );
- 2) одна из двух эпюр обязательно должна быть линейной.

### Вычисление интеграла Мора «перемножением» эпюр по правилу Верещагина

Для балок и стержневых систем, состоящих из прямых стержней, внутренние усилия единичных состояний  $\bar{N}_i, \bar{M}_i, \bar{Q}_i$  являются линейными функциями или на протяжении каждого стержня, или на его отдельных участках. Внутренние усилия грузового состояния  $N_p, M_p, Q_p$  могут иметь произвольные законы изменения по длине стержней.

Если балки и стержни имеют при этом постоянные или ступенчато-постоянные жесткости  $E \cdot F, E \cdot I, G \cdot F$ , то вычисление интегралов в формуле Мора может быть произведено с помощью эпюр внутренних усилий.

А.К. Верещагин показал, что интеграл от произведения двух функций равен произведению площади графика криволинейной функции и ординаты прямолинейной, расположенной под центром тяжести графика криволинейной функции.

Распространив математическую аргументацию А.К. Верещагина на эпюры моментов грузового и единичного состояния балки, согласно методу Мора, можно заключить, что интеграл от произведения двух функций моментов грузового и единичного состояний балки может быть заменен произведением площади грузовой эпюры моментов и ординаты единичной эпюры моментов, расположенной под центром тяжести грузовой эпюры.

Принцип «перемножения» эпюр по правилу Верещагина проиллюстрирован на рис. 2.1, где  $C$  — центр тяжести первой эпюры,  $\omega_C$  — площадь первой эпюры,  $\bar{M}_{iC}$  — ордината второй эпюры под центром тяжести первой.

Результат «перемножения» однозначных эпюр (аналогично графикам функций) является положительным, а разнозначных — отрицательным.

При использовании правила А.К. Верещагина для реализации метода Мора сложные эпюры необходимо разбить на участки, в пределах которых эпюры должны представлять собой простые фигуры, у которых известны площади и положения центров тяжести.

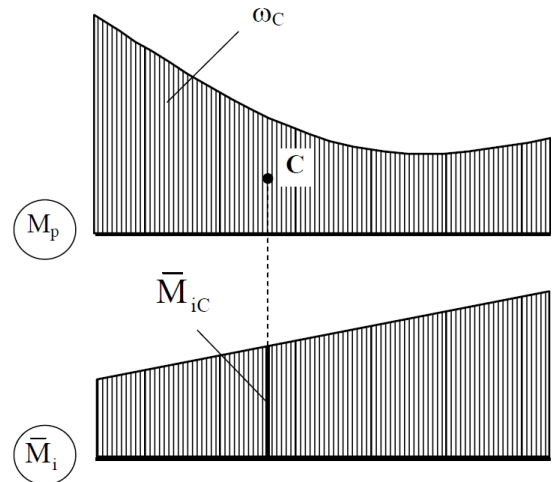


Рис. 2.1

Правило Верещагина нельзя применять в случае, когда обе эпюры грузового и единичного состояний являются нелинейными (например, для стержней с криволинейной осью). В этом случае при определении перемещений методом Мора производится аналитическое или численное вычисление интегралов в формуле (3).

Формулы для определения площадей и центров тяжести участков эпюр приведены в табл. 2.1.

Примеры разложения сложных эпюр на простейшие фигуры, площади и положения центров тяжести которых известны, приведены на рис. 2.2 и 2.3.

Таблица 2.1

Площади и положения центров тяжести участков эпюр

№	Схема балки и нагрузки, характер эпюры	Положение центра тяжести	Площадь фигуры
1		$\frac{l}{2}$	$l \cdot M$
2		$\frac{l}{3}$	$\frac{1}{2} l \cdot M$
3		$\frac{l_1}{l_2} = \frac{M_1 + 2 \cdot M_2}{M_2 + 2 \cdot M_1}$	$\frac{M_1 + M_2}{2} \cdot l$
4		$\frac{1}{4} l$	$\frac{1}{3} l \cdot M$



№	Схема балки и нагрузки, характер эпюры	Положение центра тяжести	Площадь фигуры
5		$\ell/2$	$\frac{2}{3} \ell \cdot M$ или $\frac{q \cdot \ell^3}{12}$
6		$\ell/5$	$\frac{1}{4} \ell \cdot M$
7		$\frac{7}{15} \ell$	$\frac{2}{3} \ell \cdot M_{cp}$

Прямолинейные эпюры

Криволинейные эпюры

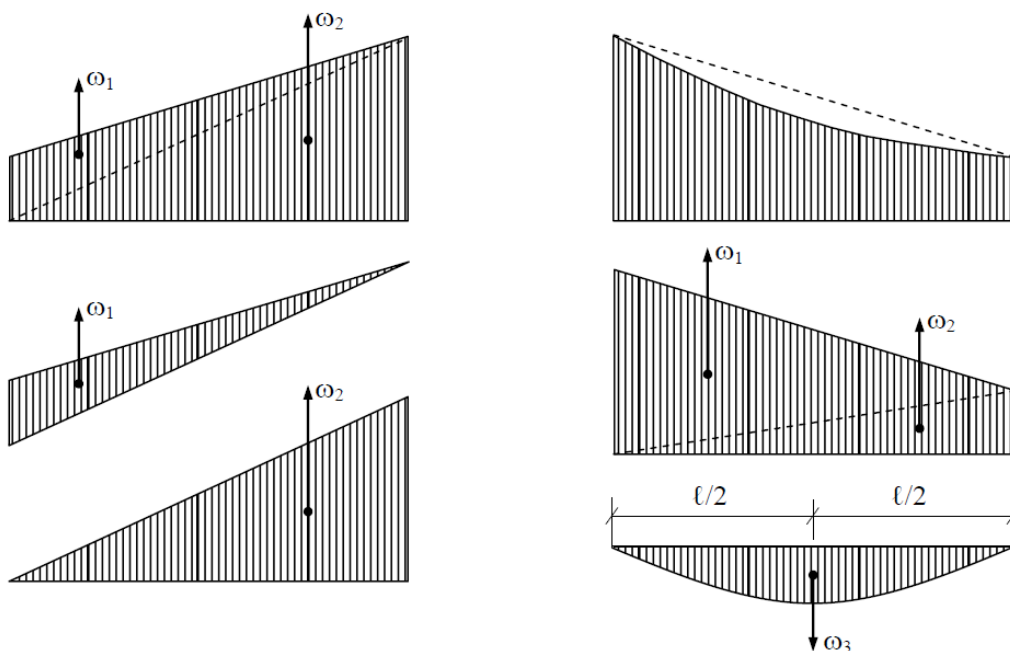


Рис. 2.2. Примеры разложения сложных фигур на простейшие для случая однозначных эпюр

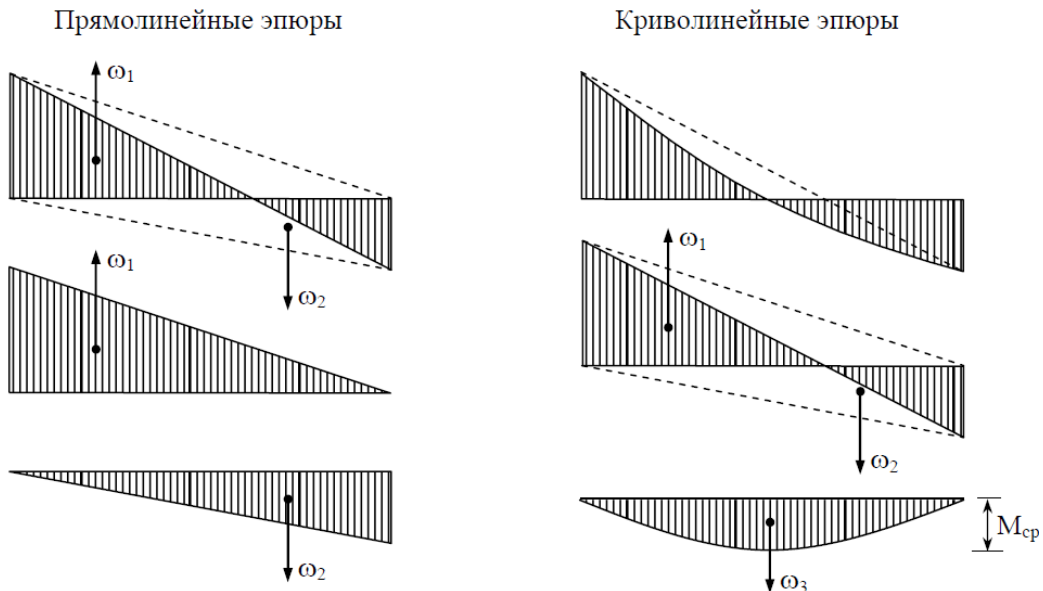


Рис. 2.3. Примеры разложения сложных фигур на простейшие для случая разнозначных эпюр

### Вычисление интеграла Мора «перемножением» эпюр по способу Симпсона

Определение перемещений в статически определимых стержневых системах «перемножением» эпюр может быть реализовано по способу Симпсона, согласно которому значение интеграла Мора на участке длиной  $\ell$  вычисляется по формуле

$$\Delta_{ip} = \int_0^{\ell} \frac{\bar{M}_i \cdot M_p}{E \cdot I} dx = \frac{\ell}{6EI} (a \cdot \bar{a} + 4c \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{b}), \quad (5)$$

где  $\ell$  — длина участка стержня;

$E$  — модуль упругости материала;

$I$  — момент инерции поперечного сечения;

$a, b, c$  — крайние и средняя ординаты эпюры изгибающих моментов грузового или действительного состояния;

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  — крайние и средняя ординаты эпюры изгибающих моментов вспомогательного или единичного состояния (рис. 2.4).

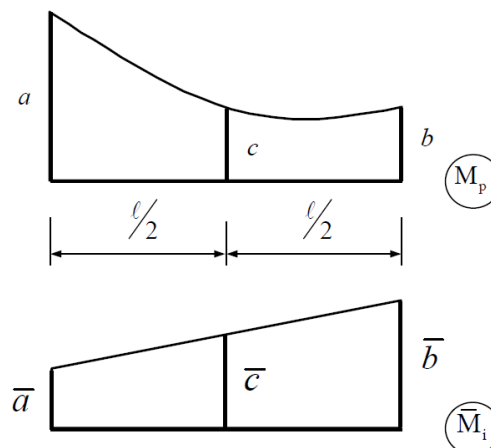


Рис. 2.4

Правило знаков: если обе «перемножаемые» ординаты в двух эпюрах расположены по одну сторону от оси эпюр (т.е. они одного знака), то их произведение имеет знак «плюс», а если они расположены по разные стороны от оси эпюр (т.е. они разного знака), то их произведение имеет знак «минус».

Если «перемножаемых» участков по длине балки или стержневой системы, удовлетворяющих условиям применимости способа Симпсона, несколько, то формула для определения перемещений принимает вид:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{6EI_i} (a \cdot \bar{a} + 4c \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{b}). \quad (6)$$

Если результат вычисления получается положительным, то направление искомого перемещения совпадает с направлением «единичного силового фактора», а если результат получается отрицательным, значит, искомое перемещение происходит в направлении, противоположном приложенному «единичному силовому фактору».

Формула Симпсона, записанная через моменты, выглядит следующим образом:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{6EI_i} (M_p^H \cdot \bar{M}_i^H + 4 \cdot M_p^{cp} \cdot \bar{M}_i^{cp} + M_p^K \cdot \bar{M}_i^K), \quad (7)$$

где  $\ell_i$  — длина участка балки;

$EI_i$  — изгибная жесткость участка балки;

$M_p^H, M_p^{cp}, M_p^K$  — значение изгибающего момента грузовой эпюры в начале, середине и конце участка;

$\bar{M}_i^H, \bar{M}_i^{cp}, \bar{M}_i^K$  — значение изгибающего момента единичной эпюры в начале, середине и конце участка.

### Вычисление интеграла Мора «перемножением» эпюр

Определение перемещений в статически определимых стержневых системах «перемножением» эпюр может быть реализовано иными, нежели правило Верещагина или способ Симпсона, правилами, например, результат «перемножения» двух трапеций (рис. 2.5) можно представить в виде следующей формулы:

$$\Delta = \frac{\ell}{6} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

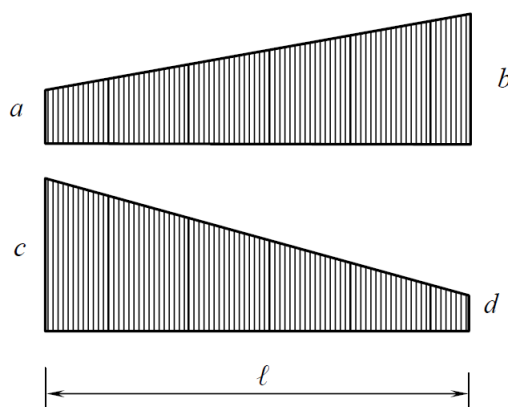


Рис. 2.5

### Примеры решения задач

#### Задача 2.1

Для консольной балки, приведенной на рис. 2.6 а, определить вертикальное и горизонтальное перемещение точки В методом Мора.

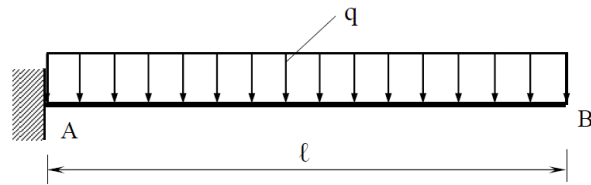


Рис. 2.6 а

**Решение**

Строим эпюру изгибающих моментов грузового состояния рассматриваемой балки (рис. 2.6 б).

После построения эпюры моментов грузового состояния создаем единичные или вспомогательные состояния.

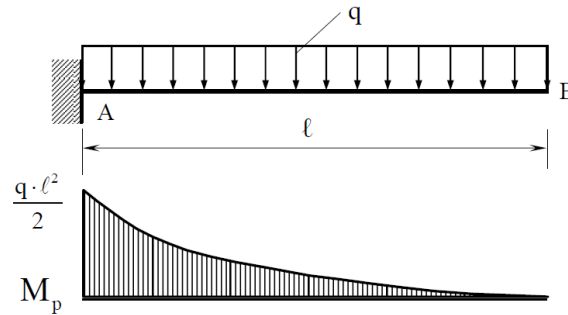


Рис. 2.6 б

Для определения искомого прогиба балки в точке B удаляем все внешние нагрузки, прикладываем в точку B единичную сосредоточенную силу и строим эпюру моментов  $M_1$  от этого нагружения (рис. 2.7). Для определения искомого угла поворота (углового перемещения) в точке B удаляем все внешние нагрузки, прикладываем в точку B единичный сосредоточенный момент и строим эпюру моментов  $M_2$  от этого нагружения (рис. 2.7).

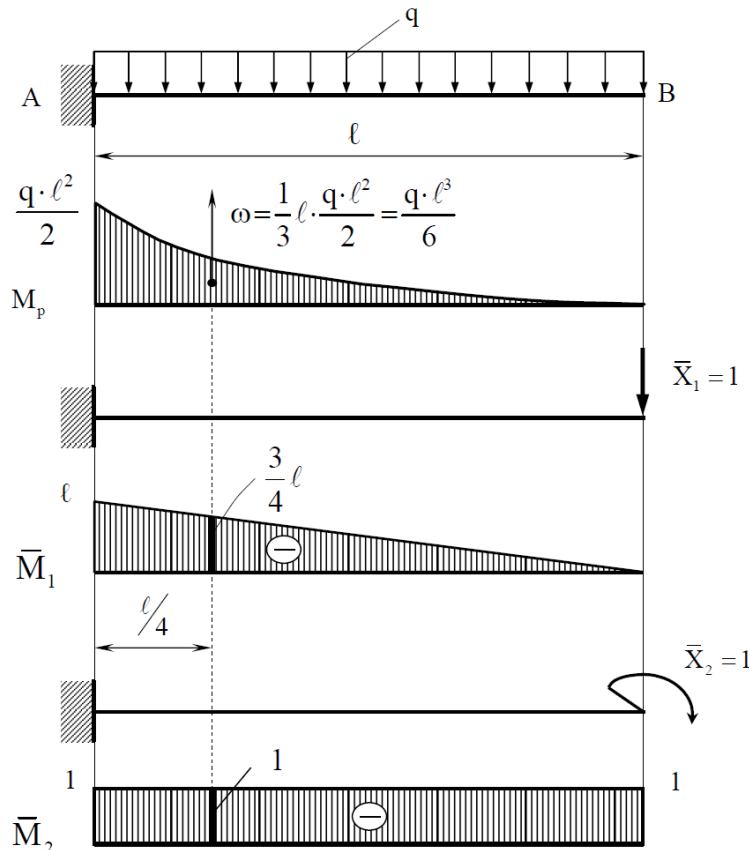


Рис. 2.7

Для определения вертикального перемещения (прогиба) в точке  $B$  воспользуемся способом «перемножения» эпюр  $M_p$  и  $\bar{M}_1$ :

$$\Delta_{1p} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx.$$

Площадь криволинейной эпюры  $M_p$ :

$$\omega = \frac{1}{3} \ell \frac{q\ell^2}{2} = \frac{q\ell^3}{6}.$$

Ордината прямолинейной эпюры  $\bar{M}_1$  под центром тяжести эпюры  $M_p$ :

$$\psi_1 = \frac{3}{4} \ell.$$

Значит, прогиб балки в точке  $B$ :

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \omega \cdot \psi_1 = \frac{1}{EI} \frac{q\ell^3}{6} \frac{3}{4} \ell = \frac{q\ell^4}{8EI}.$$

Для определения углового перемещения (угла поворота) в точке  $B$  воспользуемся способом «перемножения» эпюр  $M_p$  и  $\bar{M}_2$ :

$$\Delta_{2p} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_2 \cdot M_p}{EI} dx.$$

Площадь эпюры  $M_p$  уже определена.

Определяем ординату эпюры  $\bar{M}_2$  под центром тяжести эпюры  $M_p$ :

$$\psi_2 = 1.$$

Угловое перемещение балки в точке  $B$ :

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \omega \cdot \psi_2 = \frac{1}{EI} \frac{q\ell^3}{6} \cdot 1 = \frac{q\ell^3}{6EI}.$$

### Задача 2.2

Для шарнирно-опертой стальной двутавровой балки 20Б2, изображенной на рис. 2.8, аналогичной балке в задаче 1.2, определить прогиб в точке  $D$  и угол поворота в точке  $B$  методом Мора.

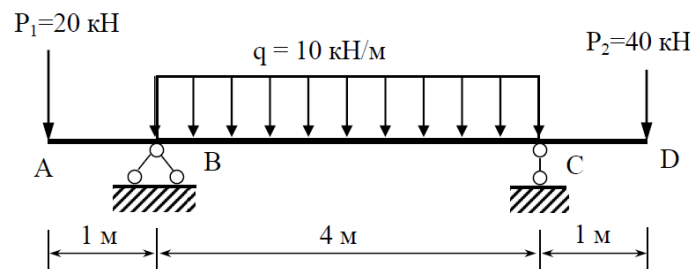


Рис. 2.8

### Решение

Поскольку рассматриваемая балка аналогична балке в задаче 1.2, воспользуемся уже определенными опорными реакциями и построенной грузовой эпюрой моментов.

Для определения прогиба балки в точке  $D$  методом Мора удаляем все внешние нагрузки, прикладываем в точку  $D$  единичную сосредоточенную силу (рис. 2.9), определяем опорные реакции единичного нагружения и строим эпюру моментов  $M_1$  от этого нагружения.

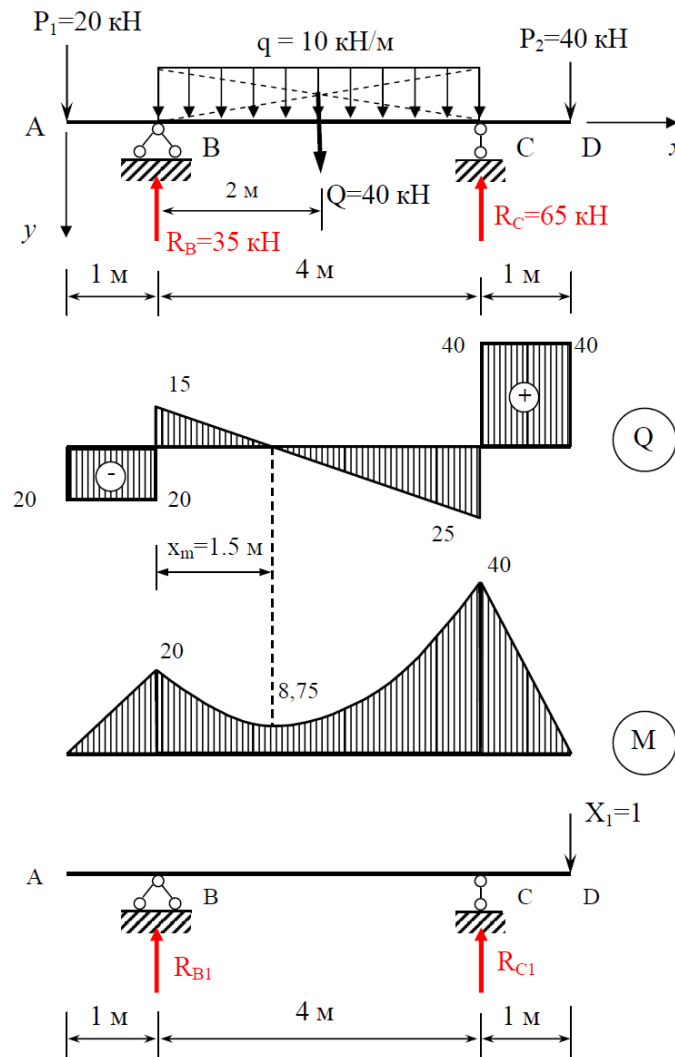


Рис. 2.9

Определяем опорные реакции единичного нагружения с помощью уравнений равновесия балки:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0; \\ X_1 \cdot 5 - R_{C1} \cdot 4 &= 0; \\ R_{C1} &= \frac{X_1 \cdot 5}{4} = \frac{1 \cdot 5}{4} = 1,25 \text{ кН}; \\ \sum M_C &= 0; \\ X_1 \cdot 1 + R_{B1} \cdot 4 &= 0; \\ R_{B1} &= -\frac{X_1 \cdot 1}{4} = -\frac{1 \cdot 1}{4} = -0,25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Выполняем проверку:

$$\sum Y = 0; \quad X_1 + R_{B1} - R_{C1} = 1 + 0,25 - 1,25 = 0.$$

Проверка по проекциям всех сил на вертикальную ось  $y$  выполнена, а значит, опорные реакции определены верно.

Строим эпюру моментов от первого единичного нагружения (рис. 2.10).

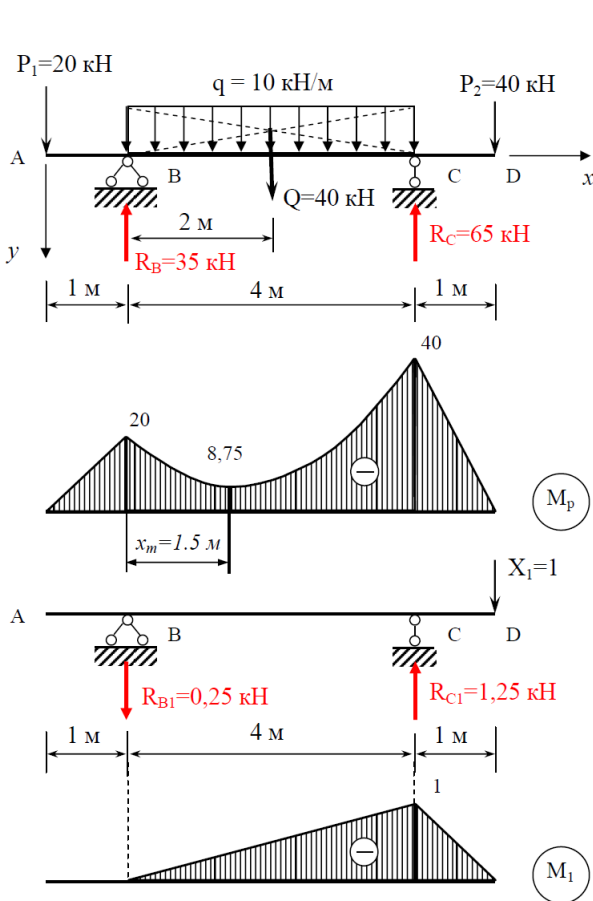


Рис. 2.10

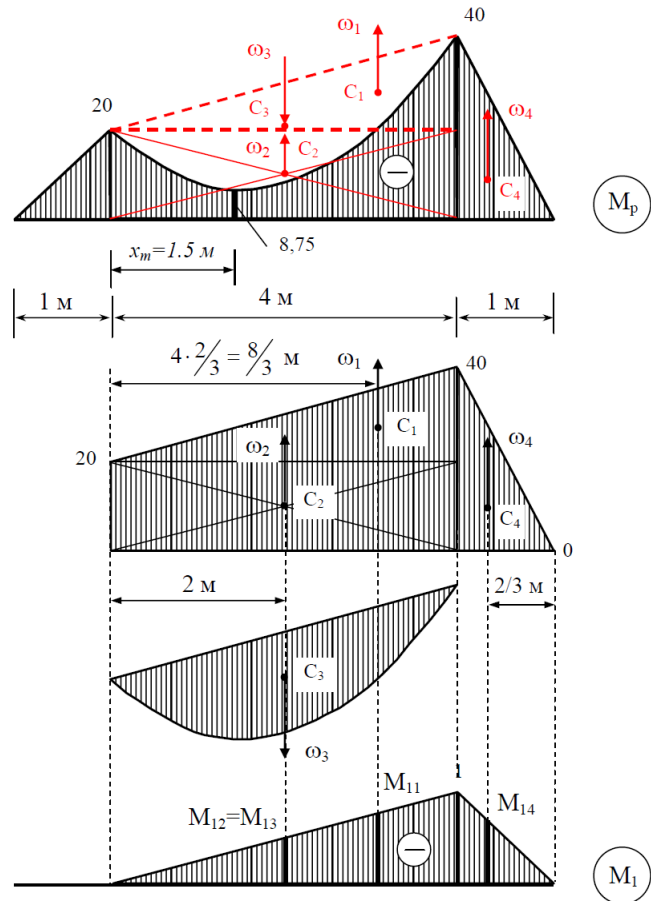


Рис. 2.11

Для определения вертикального перемещения (прогиба) в точке  $D$  воспользуемся способом «перемножения» эпюр  $M_p$  и  $M_1$ :

$$\Delta_{1p} = \int_{\ell} \frac{M_1 \cdot M_p}{EI} dx.$$

Поскольку эпюра  $M_p$  имеют сложную форму, разобьем ее на участки и простейшие фигуры, на каждом из которых определим площадь и положение центра тяжести, как показано на рис. 2.11.

Согласно способу «перемножения» эпюр по правилу Верещагина, вертикальное перемещение (прогиб) в точке  $D$  балки будет определяться выражением:

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} (\omega_1 \cdot M_{11} + \omega_2 \cdot M_{12} - \omega_3 \cdot M_{13} + \omega_4 \cdot M_{14}).$$

Определим площади фигур, составляющих эпюру моментов грузового состояния.

1-я фигура — треугольник, его площадь:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 = 40.$$

2-я фигура — прямоугольник, его площадь:

$$\omega_2 = 4 \cdot 20 = 80.$$

3-я фигура — парабола, ее площадь:

$$\omega_3 = \frac{q\ell^3}{12} = \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 53,333.$$

4-я фигура — треугольник, его площадь:

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 40 = 20.$$

После определения площадей фигур грузовой эпюры моментов определим ординаты единичной эпюры моментов, соответствующие центрам тяжести фигур грузовой эпюры:

$$|M_{11}| = R_{B1} \cdot \frac{8}{3} = 0,25 \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3} = 0,667,$$

$$|M_{12}| = |M_{13}| = R_{B1} \cdot 2 = 0,25 \cdot 2 = 0,5,$$

$$|M_{14}| = X_1 \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 0,667.$$

Вертикальное перемещение (прогиб) в точке  $D$  балки:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = y_D &= \frac{1}{EI} (\omega_1 \cdot M_{11} + \omega_2 \cdot M_{12} - \omega_3 \cdot M_{13} + \omega_4 \cdot M_{14}) = \\ &= \frac{1}{EI} (40 \cdot 0,667 + 80 \cdot 0,5 - 53,333 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,667) = \frac{53,354}{EI}. \end{aligned}$$

Для определения углового перемещения (угла поворота) в точке  $B$  методом Мора удаляем все внешние нагрузки, прикладываем в точку  $B$  единичный сосредоточенный момент и строим эпюру моментов  $M_2$  от этого нагружения (рис. 2.12).

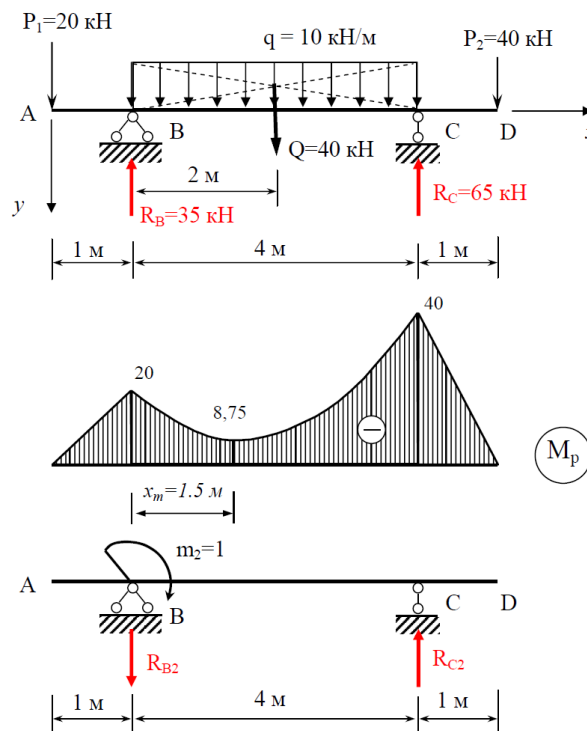


Рис. 2.12

Определяем опорные реакции второго единичного нагружения с помощью уравнений равновесия балки:

$$\sum M_B = 0; m_2 - R_{C2} \cdot 4 = 0; R_{C2} = \frac{m_2}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; m_2 - R_{B2} \cdot 4 = 0; R_{B2} = \frac{m_2}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ кН}.$$



Выполняем проверку:

$$\sum Y = 0; R_{B2} - R_{C2} = 0,25 - 0,25 = 0.$$

Проверка по проекциям всех сил на вертикальную ось  $y$  выполнена, а значит, опорные реакции определены верно.

Строим эпюру моментов от второго единичного нагружения (рис. 2.13).

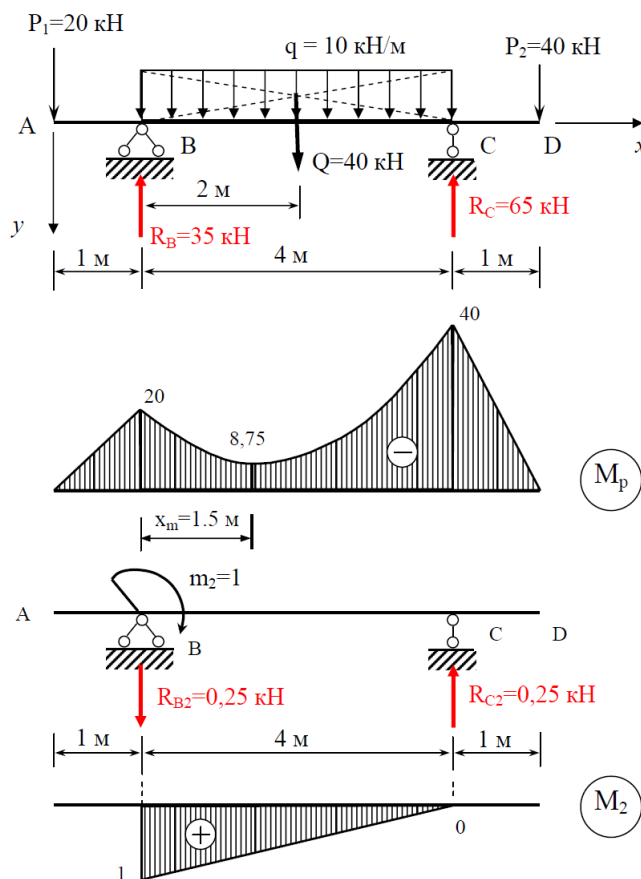


Рис. 2.13

Для определения углового перемещения (угла поворота) в точке  $B$  воспользуемся способом «перемножения» эпюр  $M_p$  и  $M_2$ .

$$\Delta_{2p} = \int_{\ell} \frac{M_2 \cdot M_p}{EI} dx.$$

Разбиение эпюры  $M_p$  на участки и простейшие фигуры уже выполнено на этапе определения прогиба в точке  $D$  и показано на рис. 2.11, поэтому для определения углового перемещения (угла поворота) в точке  $B$  необходимо определить ординаты эпюры  $M_2$ , расположенные под центрами тяжести фигур эпюры  $M_p$  (рис. 2.14).

Согласно способу «перемножения» эпюр по правилу Верещагина, угловое перемещение (угол поворота) в точке  $B$  балки будет определяться выражением:

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot M_{21} - \omega_2 \cdot M_{22} + \omega_3 \cdot M_{23}).$$

Площади фигур, составляющих эпюру моментов грузового состояния, уже определены:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 = 40,$$

$$\omega_2 = 4 \cdot 20 = 80,$$

$$\omega_3 = \frac{q\ell^3}{12} = \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 53,333.$$

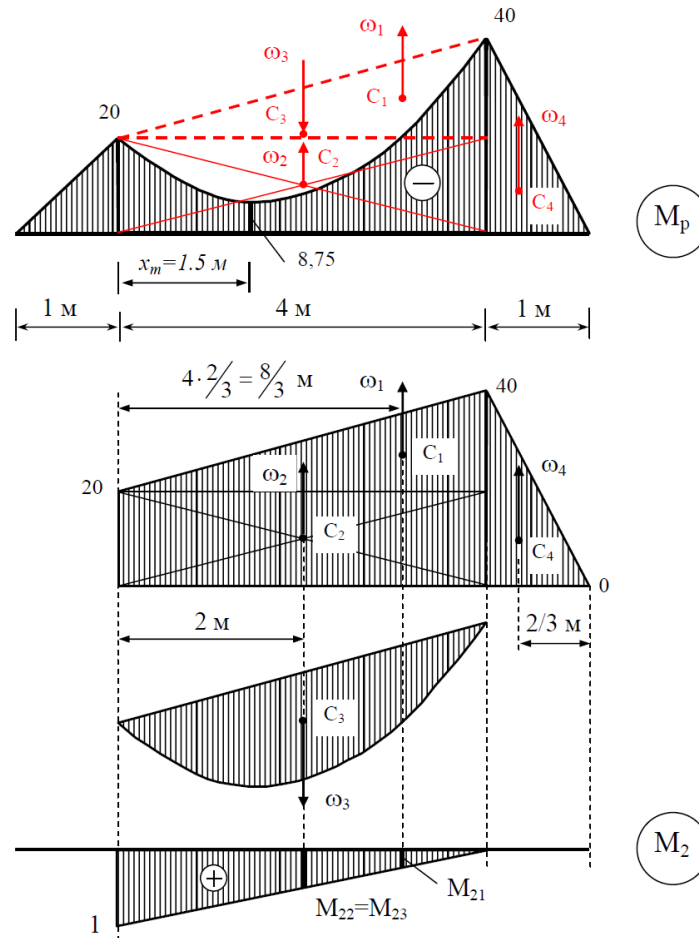


Рис. 2.14

Определим ординаты единичной эпюры моментов  $M_2$ , соответствующие центрам тяжести фигур грузовой эпюры:

$$|M_{21}| = R_{C2} \cdot \frac{4}{3} = 0,25 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} = 0,333,$$

$$|M_{22}| = |M_{23}| = R_{C2} \cdot 2 = 0,25 \cdot 2 = 0,5.$$

Угловое перемещение (углы поворота) в точке  $B$  балки:

$$\Delta_2 = \varphi_B = \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot M_{21} - \omega_2 \cdot M_{22} + \omega_3 \cdot M_{23}) =$$

$$= \frac{1}{EI} (-40 \cdot 0,333 - 80 \cdot 0,5 + 53,333 \cdot 0,5) = -\frac{26,654}{EI}.$$

Модуль упругости стали  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ .

Момент инерции поперечного сечения двутавровой балки 20Б2, согласно ГОСТ Р 57837–2017,  $I_x = 2218,49 \text{ см}^4 = 2218,49 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ , а значит, искомые прогиб в точке  $D$  и угол поворота в точке  $B$ :

$$\varphi_B = -\frac{26,654}{EI} = -\frac{26,654}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 2218,49 \cdot 10^{-8}} = -0,0057 \text{ рад.}$$

Знак «−», полученный в результате расчета величины угла поворота в точке  $B$ , означает, что поворот сечения будет в сторону, противоположную направлению единичного сосредоточенного момента вспомогательного состояния.

$$y_D = \frac{53,354}{EI} = \frac{53,354}{2,1 \cdot 2218,49} = 0,0114 \text{ м} = 1,14 \text{ см.}$$

На основании анализа результатов расчета как методом начальных параметров, так и методом Мора, реализованным способом «перемножения» эпюр по правилу Верещагина, устанавливаем, что оба метода дали идентичные значения искомых параметров.

## Глава 3

# ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

### Определение перемещений в статически определимых балках при прямом изгибе

Для балки по схеме с номером, соответствующим номеру студента по журналу, рис. 3.1 и числовым значениям по строке с номером, соответствующим номеру группы студента, табл. 3.1 нагрузки и геометрических размеров балки, требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ ; подобрать сечение балки в виде стального прокатного двутавра из условия прочности по методу предельных состояний. Заданную нагрузку считать нормативной. В расчетах принять коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f = 1,2$ , расчетное сопротивление стали по пределу текучести  $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1,0$ ;
- 2) определить с помощью метода начальных параметров значения прогибов  $y$  и углов поворота  $\varphi$  поперечных сечений в характерных точках по длине балки;
- 3) определить с помощью метода Мора значения кинематических начальных параметров  $y_0$  и  $\varphi_0$ , а также значения прогибов и углов поворота сечений балки в характерных точках по длине балки;
- 4) построить эпюры прогибов и углов поворота сечений балки, указав их особенности (точки максимума и минимума, скачки, изломы и точки перегиба). Определить числовые значения наибольших прогиба и угла поворота, приняв модуль упругости стали  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ .

Таблица 3.1

№ группы	$a$ , м	$b$ , м	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$m_1$ , кН·м	$m_2$ , кН·м
1	1,0	1,2	16	22	10	24	18	30
2	0,8	1,1	12	18	14	26	14	24
3	2,0	1,5	10	12	10	32	12	22
4	1,2	1,4	18	20	12	30	10	20

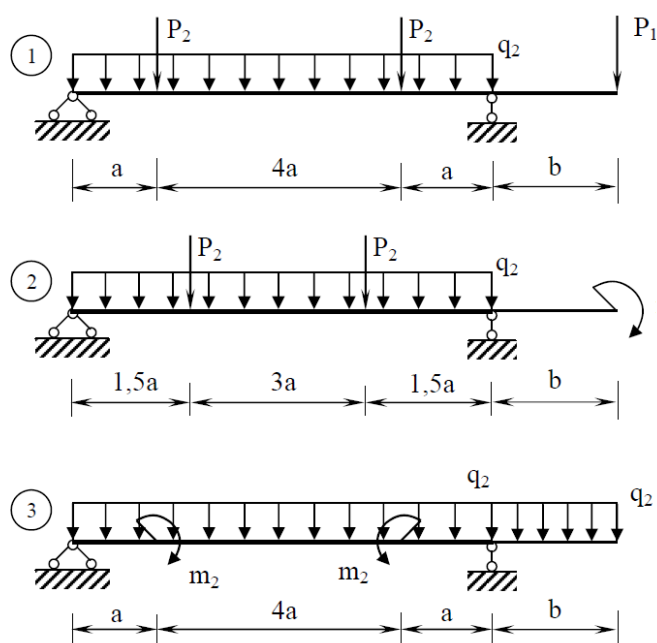


Рис. 3.1. Схемы балок

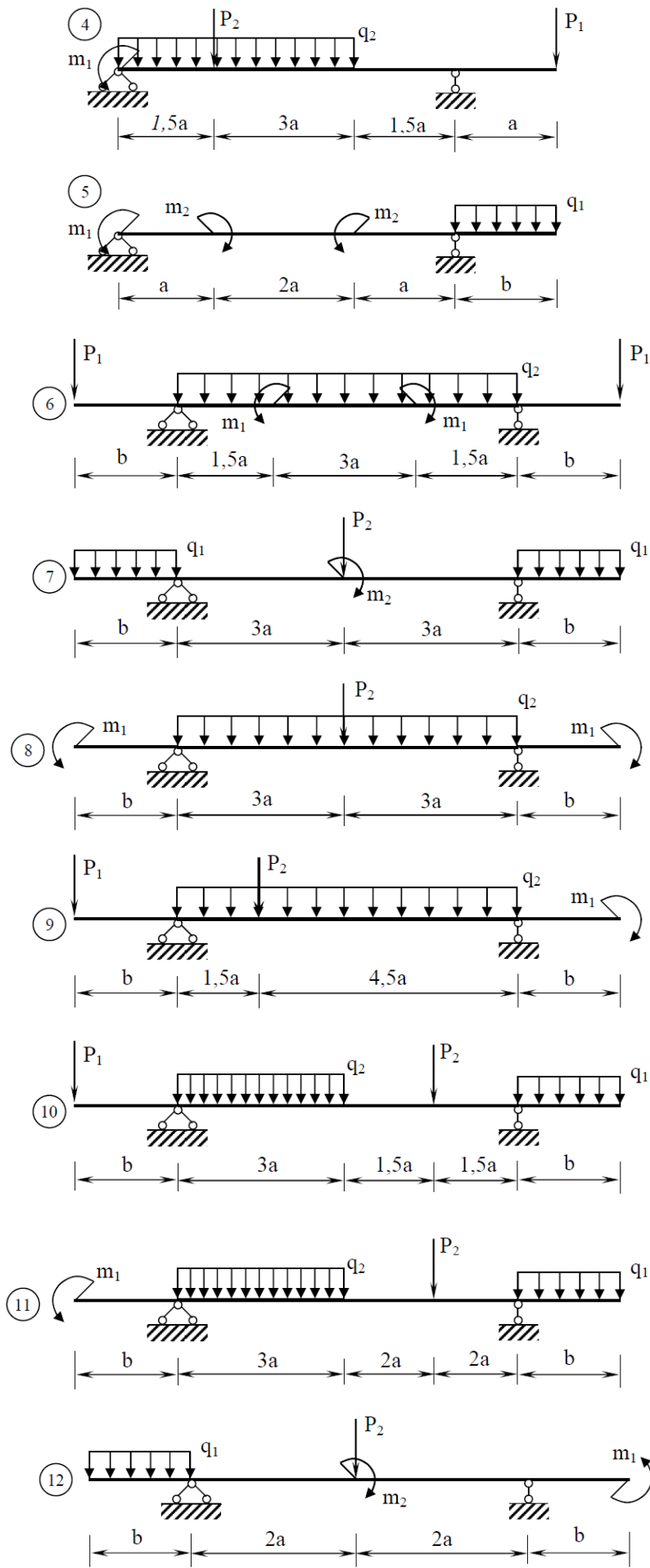


Рис. 3.1. Схемы балок (продолжение)

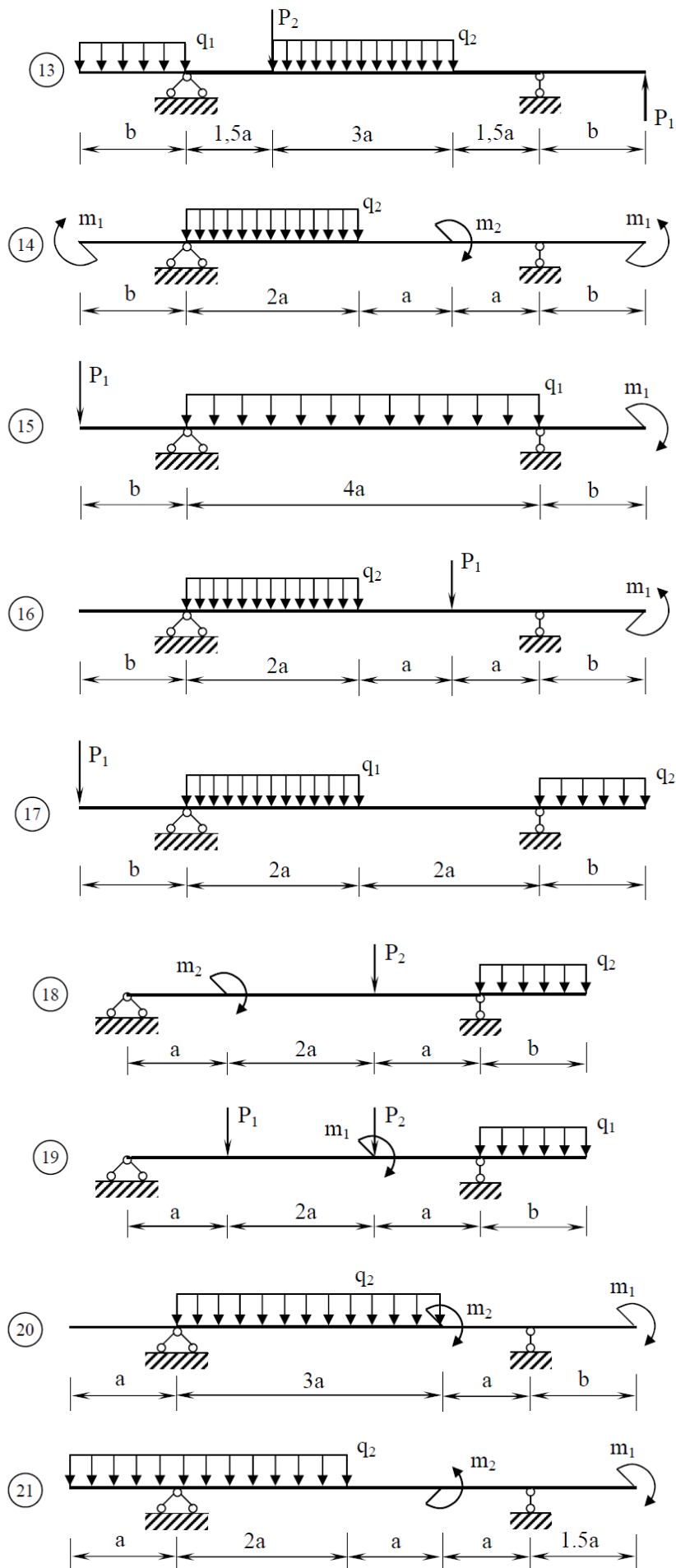


Рис. 3.1. Схемы балок (продолжение)

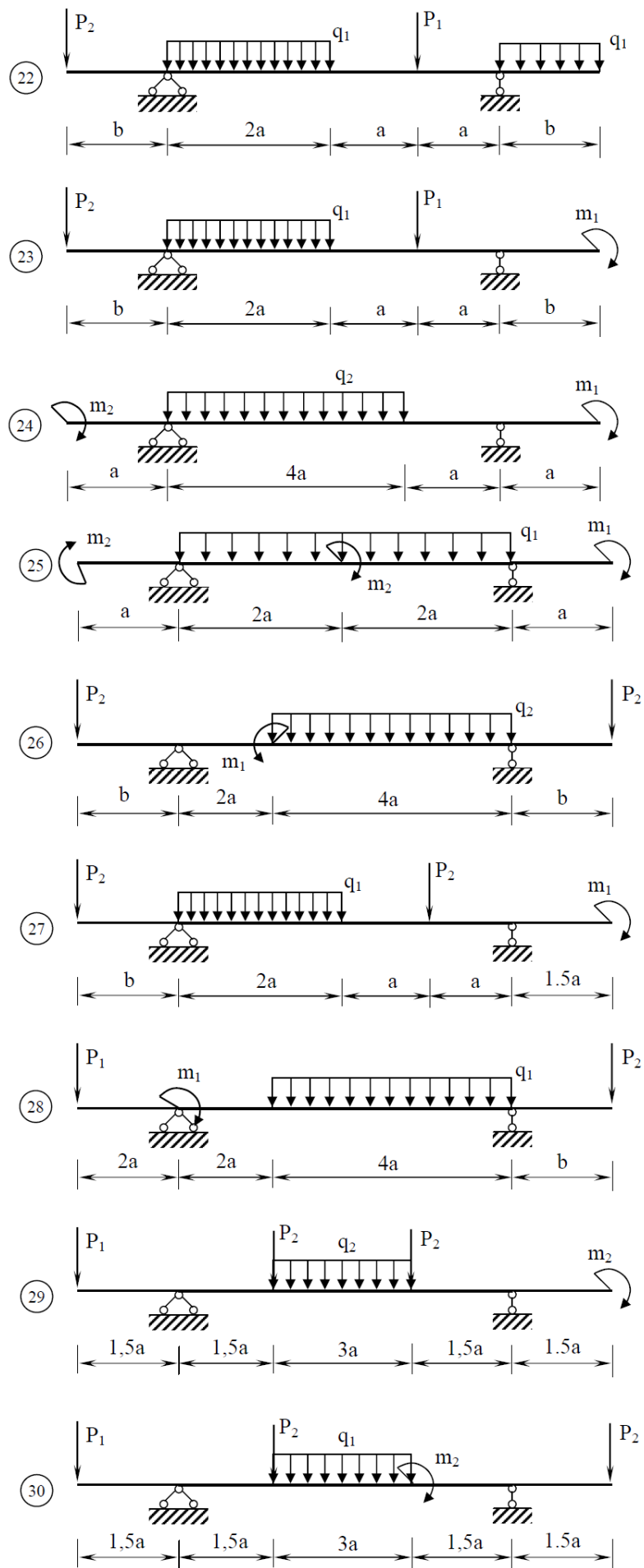


Рис. 3.1. Схемы балок (окончание)

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев В.И. Техническая механика : учебник / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. — 2-е изд. — Москва : Изд-во АСВ, 2013. — 251 с. — ISBN 978-5-93093-867-8.
2. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах : учеб. пособие / Н.М. Атаров. — Москва : ИНФРА-М, 2011. — 406 с. — ISBN 978-5-16-003871-1.
3. Атаров Н.М. Сопротивление материалов : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 3 / Н.М. Атаров [и др.] ; под общ. ред. Н.М. Атарова. — 2-е изд. — Москва : МГСУ, 2014. — 73 с. — ISBN 5-7264-0484-X.
4. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян [и др.] ; ред. Г.С. Варданян, Н.М. Атаров. — 2-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2013. — 637 с. — ISBN 978-5-16-003872-8.
5. Ганджунцев М.И. Расчет статически определимых систем: практикум для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению 08.03.01 Строительство : практикум / М.И. Ганджунцев, А.А. Петраков. — Москва : МГСУ, 2015. — URL: <http://znanium.com/catalog/product/970942> (дата обращения 30.03.2020).