

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной механики и математики

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические указания к выполнению лабораторных работ для обучающихся  
по направлению подготовки 08.03.01 Строительство*

Составитель Ж.Г. Могилюк

© Национальный исследовательский  
Московский государственный  
строительный университет, 2020

Москва  
Издательство МИСИ — МГСУ  
2020

УДК 624.04  
ББК 38.5:30.121  
С64

*Рецензент* — доктор технических наук, доцент *Л.Ю. Фриштер*,  
профессор кафедры прикладной математики НИУ МГСУ

С64      **Сопротивление материалов** [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению лабораторных работ для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 Строительство / сост. Ж.Г. Могилюк. ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра прикладной математики. — Электрон. дан. и прогр. (0,65 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2020. — Режим доступа: <http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r91/cgiirbis64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS>. — Загл. с титул. экрана.

Методические указания посвящены описанию методики выполнения лабораторных работ по курсу «Сопротивление материалов»; содержат краткие теоретические сведения по указанному разделу, основные схемы и рекомендации по выполнению и оформлению отчета по лабораторной работе.

Методические указания предназначены для оказания методической помощи студентам бакалавриата по направлению подготовки 08.03.01 Строительство при выполнении лабораторных работ, подготовке к защите отчета по лабораторным работам курса.

*Учебное электронное издание*

© Национальный исследовательский  
Московский государственный  
строительный университет, 2020

Редактор, корректор *Л.В. Светличная*  
Компьютерная правка и верстка *О.А. Ивановой*  
Дизайн первого титульного экрана *Д.Л. Разумного*

*Для создания электронного издания использовано:*  
Microsoft Word 2010, Adobe InDesign CS6, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию 00.00.2020. Объем данных 0,65 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Московский государственный строительный университет».  
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.  
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.  
E-mail: [ric@mgsu.ru](mailto:ric@mgsu.ru), [rio@mgsu.ru](mailto:rio@mgsu.ru)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
Лабораторная работа №1. Экспериментальное определение перемещений балки при изгибе.....	6
Лабораторная работа №2. Сложное сопротивление стержней. Внецентренное растяжение/сжатие.....	9
Библиографический список .....	13

## ВВЕДЕНИЕ

В рамках курса «Сопротивление материалов» предусмотрено освоение студентами основных принципов и методов расчета строительных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, важным элементом которого является выполнение студентами лабораторных работ.

При проведении лабораторных работ студенту предоставляется возможность в результате эксперимента убедиться в справедливости основных принципов и приемов расчета строительных конструкций и исследовать механические характеристики материалов конструкций.

Лабораторные работы предназначены для закрепления учебного материала, излагаемого на лекциях и практических занятиях по курсу дисциплины.

На лабораторные занятия студенты должны являться подготовленными, заблаговременно изучив теоретическую часть и порядок проведения работы.

Перед началом проведения лабораторных работ студенты в обязательном порядке должны пройти инструктаж по технике безопасности. Инструктаж по технике безопасности проводит преподаватель, ведущий лабораторные занятия. Студенты, не прошедшие инструктаж по технике безопасности, к выполнению лабораторных работ не допускаются.

Лабораторные работы должны выполняться в следующей последовательности:

- проработка учебного материала по теме лабораторной работы по конспекту лекций и практических занятий, а также по рекомендуемой литературе и методическим указаниям;
- проведение лабораторной работы в группе согласно содержанию и порядку проведения работы на основании настоящих методических указаний;
- оформление отчета по лабораторной работе в виде заполнения журнала работы, содержащего расчетный и графический материал;
- защита лабораторной работы, получение подписи преподавателя с указанием даты защиты.

Защита лабораторной работы должна сопровождаться краткими, последовательными объяснениями и схемами.

По результатам выполнения лабораторной работы должен быть оформлен журнал от руки с титульным листом, на котором обязательно указывается наименование дисциплины, наименование соответствующего раздела дисциплины, ФИО преподавателя, ФИО, курс и группа студента.

Все чертежи и схемы рекомендуется выполнять карандашом, а записи — ручкой. Все расчетные выкладки должны представлять собой логическую цепочку и сопровождаться пояснительным текстом.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БАЛКИ ПРИ ИЗГИБЕ

Изгиб представляет собой деформацию, при которой под действием внешних сил происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны оси кривого бруса. При этом точки оси получают поперечные перемещения или прогибы, а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей. Углы поворота поперечных сечений можно считать равными углам наклона касательной к изогнутой оси балки.

Осью балки называется геометрическое место точек центров тяжести поперечных сечений, т.е. сечений, нормальных к оси балки. Так как ось балки лежит в нейтральном слое, то она при изгибе не меняет своей длины.

Вводится система координат: ось  $x$  направлена вдоль оси балки, начало отсчета — на левом конце балки, ось  $y$  направлена вниз (см. рис. 1).

Прогибы и углы поворота в балках называются линейными и угловыми перемещениями.

Прогибы  $y$  и углы поворота  $j$  в балках являются переменными величинами, т.е. функциями координаты  $x$ , представляющей собой расстояние от начала координат до рассматриваемого сечения. Таким образом, уравнение кривой, по которой изогнется ось балки под нагрузкой, (уравнение изогнутой оси балки) можно записать в виде:

$$y = f(x)$$

Касательная к изогнутой оси балки в произвольной точке составляет с осью  $x$  угол, равный углу поворота поперечного сечения балки относительно первоначального положения. Тангенс угла, образованного касательной к графику функции с координатной осью, равен:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$$

Поскольку прогибы балки существенно меньше ее длины, а углы поворота поперечных сечений обычно не превышают  $1^\circ$ , то можно считать, что тангенс угла наклона касательной равен углу, выраженному в радианах, т.е.

$$\varphi = \frac{dy}{dx}$$

Таким образом, угол поворота сечения балки равен первой производной от функции прогиба по координате  $x$  для этого сечения.

Точное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$\pm \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI}$$

Поскольку  $(y')^2 = [\operatorname{tg}(1^\circ)]^2 = 0,017^2 = 0,000289$ , то этим слагаемым в выражении в уравнении изогнутой оси балки можно пренебречь.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки приобретает вид:

$$\pm y'' = \frac{M}{EI}$$

Эта формула устанавливает зависимость между изгибающим моментом, изгибной жесткостью балки и 2-ой производной от прогиба.

Известно, что  $M > 0$ , когда момент, растягивая нижние волокна, обращает балку выпуклостью вниз.

Из курса математики известно, что вторая производная от функции отрицательна, если кривая обращена выпуклостью вниз в положительную сторону оси  $y$ .

Таким образом, при положительном изгибающем моменте, 2-ая производная должна быть отрицательной, следовательно, в уравнении изогнутой оси балки удерживается знак «-», и приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

## Содержание задания

Для двухопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами, определить прогиб в указанных на схеме точках и угол поворота на правой опоре. Экспериментальные данные прогиба сравнить с теоретическими, полученными при расчете методом Мора.

### Схема эксперимента

Исследования балки проводятся на экспериментальной установке (рис. 1). Испытуемая стальная балка, установленная на двух шарнирных опорах, имеет длину 197 см. Нагрузка на балку прикладывается сосредоточенно с помощью грузовых подвесов. Измерение прогибов и углов поворота поперечных сечений производится при помощи индикаторов часового типа. Цена деления индикатора  $C = 0,01$  мм. Угловая цена деления шкалы индикатора составляет  $C_\phi = 0,01 / e$ , где  $e = 150$  мм.

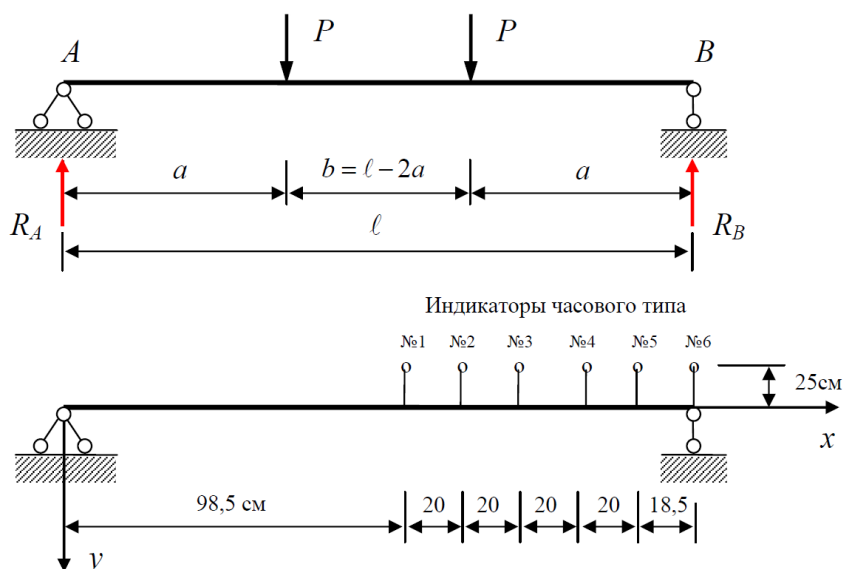


Рис. 1

### Порядок проведения работы

1. Подготовить установку к работе. Установить в местах, указанных на рис. 1, подвесы и индикаторные стойки.
2. Записать параметры балки и изобразить расчетную схему балки.
3. Определить момент инерции поперечного сечения балки.
4. Вычислить теоретические значения искомых перемещений балки аналитическим методом (методом Мора).
5. Установить стрелки индикаторов на «0».
6. Провести загрузку балки нагрузкой согласно схеме рис. 1.
7. Произвести отсчеты по индикаторам часового типа.
8. Результаты измерений и расчетов занести в табл. 1.
9. По аналитическим данным построить график прогибов балки. На полученном графике точками отметить полученные экспериментальные данные.
10. Определить погрешность между теоретическими значениями и экспериментальными результатами.

Таблица 1

### Обработка результатов эксперимента

Нагрузка, кг	Показатель индикатора											
	№ 1		№ 2		№ 3		№ 4		№ 5		№ 6	
	Отсчет индикатора	Расчетный прогиб, мм	Отсчет индикатора	Расчетный прогиб, мм	Отсчет индикатора	Расчетный прогиб, мм	Отсчет индикатора	Расчетный прогиб, мм	Отсчет индикатора	Расчетный прогиб, мм	Отсчет индикатора	Расчетный угол, рад
220												
330												
660												

### Контрольные вопросы

1. Какие перемещения получает балка при изгибе?
2. В чем измеряются перемещения балки при изгибе?
3. Знаки перемещений балки?
4. Что такое изогнутая ось балки?
5. Как записывается основное уравнение изогнутой оси балки?
6. Каков порядок проведения эксперимента?
7. Каков принцип определения теоретических значений перемещений балки?
8. Как определить погрешность между теоретическими значениями и экспериментальными результатами?



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

### СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ/СЖАТИЕ

К сложному сопротивлению относятся такие виды нагружения бруса, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает не менее двух внутренних силовых факторов.

Одним из случаев сложного сопротивления является внецентренное растяжение или сжатие конструкции.

Внецентренное растяжение (сжатие) вызывается силой, параллельной продольной оси конструкции, но не совпадающей с ней, т.е. приложенной с некоторым эксцентриситетом относительно центра тяжести поперечного сечения.

На практике внецентренное растяжение (сжатие) встречается при расчете опор мостов, колонн промышленных зданий и гражданских сооружений.

В произвольном поперечном сечении конструкции, испытывающей внецентренное растяжение или сжатие, возникает три внутренних силовых фактора: продольная сила  $N = P$  и два изгибающих момента относительно осей поперечного сечения  $M_x$  и  $M_y$ :

$$M_x = P \cdot y_p; \quad M_y = P \cdot x_p,$$

где  $x_p, y_p$  — координаты точки приложения силы относительно осей поперечного сечения.

На основании принципа независимости действия сил напряжения в точках поперечного сечения при внецентренном растяжении (сжатии) определяются по формуле:

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot x_p}{I_y} x + \frac{P \cdot y_p}{I_x} y,$$

или

$$\sigma(y, z) = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_p}{i_y^2} x + \frac{y_p}{i_x^2} y \right)$$

где  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$ ,  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$  — радиусы инерции сечения;  $x, y$  — координаты точки, в которой определяются напряжения.

Выражение в скобках показывает, во сколько раз напряжения при внецентренном растяжении (сжатии) больше напряжений центрального растяжения (сжатия).

Для определения экстремальных (максимальных) значений напряжений вводится понятие нейтральной или нулевой линии.

Нейтральная или нулевая линия — это геометрическое место точек, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Уравнение нулевой линии имеет вид:

$$1 + \frac{x_p}{i_y^2} x + \frac{y_p}{i_x^2} y = 0$$

Если привести уравнение нейтральной линии к виду уравнения прямой в отрезках, то отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат, определяются по формулам:

$$a_x = -\frac{i_x^2}{y_p}; \quad b_y = -\frac{i_y^2}{x_p}$$

Нейтральная линия при внецентренном растяжении (сжатии) не проходит через центр тяжести сечения, а отсекает на осях координат отрезки  $a_x, b_y$ .

Нейтральная линия делит поперечное сечение на две части, отличающихся знаком нормальных напряжений. Около центра тяжести сечения находится область, называемая ядром сечения. Ядро сечения обладает тем свойством, что, если точка приложения продольной силы находится в этой области, то все сечение испытывает напряжения одного знака.

Максимальные напряжения в сечении конструкции, испытывающей внецентренное растяжение или сжатие, возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

### Содержание задания

Определить нормальные напряжения в сечении образца (по 5-ти продольным сечениям, показанным на рис. 2) в случае плоского внецентренного растяжения. На схеме поперечного сечения показать положение точки приложения силы, нулевую линию, ядро сечения. Экспериментальные значения напряжений в 5-ти точках по высоте поперечного сечения сравнить с теоретическими величинами, полученными расчетным путем для тех же точек сечения. Построить эпюры напряжений по результатам расчёта и эксперимента.

### Схема эксперимента

Испытание проводится на испытательной машине МИ-40У. Напряжения в точках поперечного сечения измеряются при помощи датчиков сопротивления (тензодатчиков). Деформации в точках поперечного сечения измеряются при помощи тензорезисторов с ценой деления  $K = 1 \cdot 10^{-5}$ .

Испытываемый образец плоский, сечением  $50 \times 5$  мм (рис. 2), материал образца — алюминий с модулем упругости  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа =  $7 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

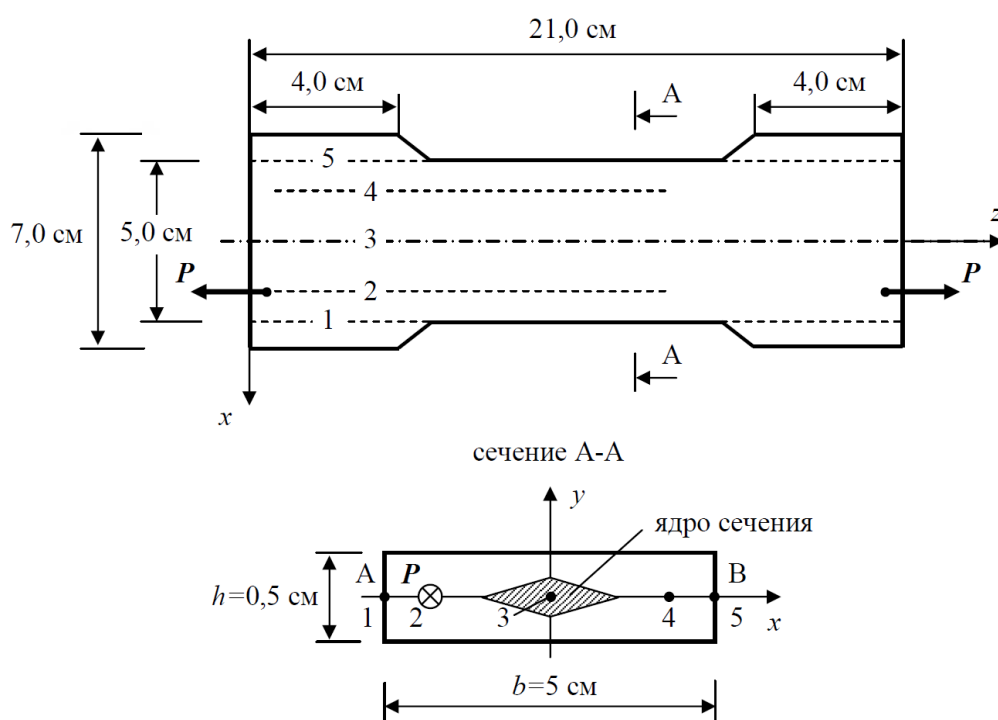


Рис. 2

### Порядок проведения работы

1. Подготовить установку к работе.
2. Записать параметры образца и изобразить расчетную схему.
3. Определить момент инерции и радиус инерции поперечного сечения образца.
4. Определить координаты точки приложения силы и задать величину растягивающей силы.
5. Вычислить теоретические значения искомых напряжений аналитическим методом.

Напряжения при плоском внецентренном растяжении определяются по формуле:

$$\sigma_i = \frac{P}{F} + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{P}{F} + \frac{P x_p}{I_y} x_i,$$

где  $x_p$  — координаты точки приложения силы,  $x_i$  — координаты точек 1, 2, 3, 4, 5 сечения,  $I_y$  — момент инерции поперечного сечения образца.

6. Провести загрузку образца нагрузкой согласно схеме рис. 2.
7. Произвести отсчеты по тензорезисторам и занести результаты в табл. 2.
8. Произвести расчет среднего приращения на ступень нагрузки для каждой из пяти точек сечения по формуле:

$$\Delta_{\text{ср}} = \frac{\sum \Delta_i}{n}$$

9. Определить экспериментальные значения напряжений в 5-ти точках по высоте поперечного сечения.

Относительные деформации образца в результате испытания:

$$\varepsilon = \Delta \cdot K$$

Согласно закону Гука относительные деформации связаны с напряжениями выражением:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \Delta \cdot K \cdot E$$

Экспериментальные значения напряжений в 5-ти точках по высоте поперечного сечения определяются выражением:

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i = \Delta_{\text{ср}} \cdot K \cdot E$$

10. Результаты измерений и расчетов занести в табл. 3.

11. По аналитическим данным построить график нормальных напряжений по высоте поперечного сечения образца. На полученном графике точками отметить экспериментальные значения.

12. Определить погрешность между теоретическими значениями и экспериментальными результатами по формуле:

$$\delta = \frac{G_{\text{теор}} - G_{\text{эксп}}}{G_{\text{теор}}} \cdot 100\%$$

Таблица 2

### Обработка результатов эксперимента

Нагрузка P, кг	точка №1		точка №2		точка №3		точка №4		точка №5	
	отсчет	приращение $\Delta_{i1}$	отсчет	приращение $\Delta_{i2}$	отсчет	приращение $\Delta_{i3}$	отсчет	приращение $\Delta_{i4}$	отсчет	приращение $\Delta_{i5}$
125										
250										
375										
500										

Таблица 3

### Результаты измерений и расчетов

Точки замера	Теоретические значения напряжений $\sigma_{\text{теор}}$	Экспериментальные значения напряжений $\sigma_{\text{эксп}}$	Погрешность между теоретическими и экспериментальными значениями $\delta$ , %
1			
2			
3			
4			
5			

### Контрольные вопросы

1. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях конструкции, испытывающей внецентренное растяжение или сжатие?

2. Определение нейтральной линии и правила ее построения?
3. Определение и правила построения ядра сечения?
4. Каков порядок проведения эксперимента?
5. Каков принцип определения теоретических значений напряжений в сечении при внецентренном растяжении или сжатии?
6. Как определить погрешность между теоретическими значениями напряжений и экспериментальными результатами?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев В.И. Техническая механика: учебник для подготовки бакалавров по направлению 270800 «Строительство» / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: АСВ, 2013. — 251 с. — ISBN 978-5-93093-867-8.

2. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / Н.М. Атаров [рец.: Н.Н. Атаров]. — Москва: ИНФРА-М, 2011. — 406 с. — ISBN 978-5-16-003871-1.

3. Атаров Н.М. Сопротивление материалов: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270800 «Строительство»: [в 3 ч.] / Н.М. Атаров [и др.]; Московский государственный строительный университет; [рец.: С.Н. Кривошапко, Н.Н. Шапошников]. — Москва: МГСУ, 2012. — 2014, ч. 3 / под общ. ред. Н.М. Атарова. — 2-е изд., испр. и доп. — 2014. — 73 с. — ISBN 5-7264-0484-X.

4. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник для вузов / Г.С. Варданян [и др.]; под ред. Г.С. Варданяна, Н.М. Атарова. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Инфра-М, 2013. — 637 с. — ISBN 978-5-16-003872-8.

5. Ганджунцев М.И. Расчет статически определимых систем [Электронный ресурс] : практикум / М.И. Ганджунцев, А.А. Петраков; Национальный исследовательский московский государственный строительный университет. — 2-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 65 с.). — Москва : Изд-во МИСИ-МГСУ, 2017. — (Строительство). — ISBN 978-5-7264-1772-1.