

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ж.Г.Могилюк

МЕХАНИКА. ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной
работе по дисциплине «Механика. Техническая механика»*

Электронное издание

МОСКВА
2020

УДК 624.04
ББК 38.5:30.121
С64

Рецензент

Профессор кафедры Прикладной математики,
д.т.н., доцент Фриштер Л.Ю.

Механика. Техническая механика: методические указания /
Ж.Г.Могилюк. – М., НИУ МГСУ, 2020. - 53 с.

Настоящие методические указания посвящены разделу курса «Механика. Техническая механика»; содержат краткие теоретические сведения по указанному разделу, основные формулы и примеры решения задач.

Методические указания подготовлены на кафедре «Прикладной механики и математики» и предназначены для оказания методической помощи студентам бакалавриата по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» при выполнении домашних заданий, подготовке к практическим занятиям и мероприятиям промежуточной аттестации.

Редактор, корректор Л.В.Себова
Верстка и дизайн титульного экрана Д.Л.Разумного

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2007, ПО Adobe Acrobat Pro

Подписано к использованию Объем данных 0,3 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет».
129337, Москва, Ярославское ш., 26

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел.: (495) 287-49-14, вн.13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Определение геометрических характеристик поперечных сечений	7
Глава 2. Определение внутренних усилий в стержневых системах при изгибе	21
Глава 3. Задание для выполнения домашнего задания №1	33
Глава 4. Задание для выполнения домашнего задания №2	45

ВВЕДЕНИЕ

В процессе проектирования любого строительного объекта необходимо выполнить расчет каждого конструктивного элемента, в рамках которого осуществить выбор материала и размеров каждой конструкции так, чтобы обеспечить их надежность и прочность.

Надежность строительного объекта – способность строительного объекта выполнять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации.

Прочность – способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, не разрушаясь.

Основной задачей расчетного проектирования для обеспечения надежности как отдельных строительных конструкций, так и зданий и сооружений в целом, является ограничение напряжений и деформаций в конструкциях, обеспечивающих безотказную эксплуатацию, т.е. напряжения и деформации, возникающие в конструкциях, должны быть ниже предельных значений, при которых может произойти разрушение.

В рамках курса «Механика. Техническая механика» предусмотрено освоение студентами основных принципов и методов расчета строительных конструкций на прочность.

Домашние задания составляют часть самостоятельной работы студентов и предназначены для закрепления учебного материала, излагаемого на лекциях и практических занятиях по курсу дисциплины, способствуя развитию у студентов навыков самостоятельного решения задач расчета элементов строительных конструкций, поиску оптимальных решений и научного подхода к решению поставленных задач.

Домашние задания должны выполняться в следующей последовательности:

- проработка учебного материала по теме задания по конспекту лекций и практических занятий, а также по рекомендуемой литературе и методическим указаниям;

- решение задач, входящих в задание;
- проведение консультаций с преподавателем, проводящим практические занятия в группе;
- исправление ошибок (если они имеются), указанных преподавателем во время консультаций;
- оформление домашнего задания в виде пояснительной записки, содержащей расчетный и графический материал;
- защита домашнего задания, получение подписи преподавателя с указанием даты защиты.

Решение домашних заданий должно сопровождаться краткими, последовательными объяснениями и схемами. Расчеты рекомендуется вести в общем виде. Вычисления должны выполняться с обязательным указанием размерности полученных результатов. В расчетах следует использовать принятую государственным стандартом Международную систему единиц (СИ).

Для большей наглядности результаты расчетов следует сопровождать и/или представлять в виде схем и графиков. Схемы и графики должны быть выполнены в масштабе, обеспечивающем наилучшую наглядность и возможность сопоставления и анализа результатов.

Домашнее задание оформляется от руки или в виде компьютерного набора на листах формата А4 с закрепленным степлером титульным листом, на котором обязательно указывается наименование дисциплины, наименование соответствующего раздела дисциплины, ФИО преподавателя, ФИО, курс и группа студента. Для оформления работы используются только лицевые стороны листов, использование оборотной стороны листов не допускается.

Оформление задачи следует начинать с текста условия, включая все числовые данные и схемы заданной системы.

Последующее оформление следует вести в соответствии с планом решения задачи. Все чертежи и схемы рекомендуется выполнять карандашом, а записи – ручкой.

При построении схем и графиков необходимо размещать материал таким образом, чтобы расчетная схема конструкции и схемы и графики, иллюстрирующие расчет, располагались на одной странице, избегая перехода схем и графиков на другую страницу.

Все расчетные выкладки должны представлять собой стройную логическую цепочку и сопровождаться пояснительным текстом.

ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Деформации и напряжения, возникающие в конструкции при внешнем нагружении, существенно зависят от размеров и формы ее поперечного сечения. Величины, характеризующие форму и размеры поперечных сечений конструктивных элементов и используемые при их расчетах, называют геометрическими характеристиками сечений.

Основными геометрическими характеристиками поперечных сечений, используемыми при расчете конструкций на прочность и жесткость являются следующие:

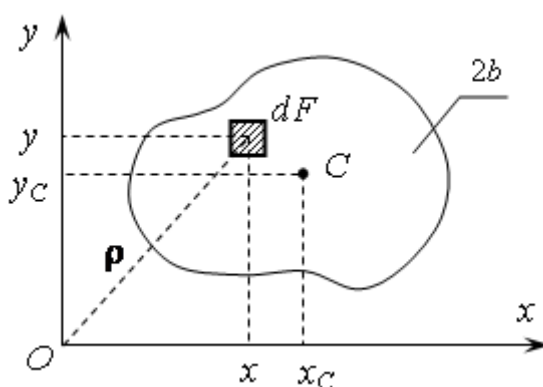


Рис. 1.1

1. Площадь поперечного сечения

$$F = \int_F dF$$

Размерность площади – $[м^2]$.

2. Статические моменты сечения

$$S_x = \int_F y dF$$

$$S_y = \int_F x dF$$

Размерность статического момента – $[м^3]$.

Если известны площадь сечения и положение его центра тяжести, то статические моменты определяются по формулам:

$$S_x = y_c F$$

$$S_y = x_c F$$

где x_c, y_c – координаты центра тяжести сечения, F - площадь сечения.

Таким образом, если известна площадь и статические моменты сечения, то координаты центра тяжести сечения определяются по формулам:

$$x_c = S_y / F$$

$$y_c = S_x / F$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными. Статические моменты сечения относительно центральных осей равны нулю.

3. Моменты инерции сечения

3.1. Осевые моменты инерции сечения

$$I_x = \int_F y^2 dF$$

$$I_y = \int_F x^2 dF$$

3.2. Центробежный момент инерции сечения

$$I_{xy} = \int_F xy dF$$

3.3. Полярный момент инерции сечения

$$I_p = \int_F \rho^2 dF,$$

где ρ - расстояние от текущей точки до начала координат.

Так как согласно теореме Пифагора $\rho^2 = x^2 + y^2$, то

$$I_p = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = I_x + I_y$$

Размерность моментов инерции сечения – $[м^4]$.

4. Радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$$

Размерность радиусов инерции сечения – $[м]$.

5. Моменты сопротивления сечения

Осевым моментом сопротивления сечения называют отношение момента инерции сечения относительно этой же оси к расстоянию до наиболее удаленной точки сечения от этой оси:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}$$

Полярным моментом сопротивления сечения называют отношение полярного момента инерции сечения к наибольшему радиусу-вектору сечения:

$$W_p = \frac{I_p}{|\rho_{\max}|}$$

Размерность момента сопротивления сечения – $[м^3]$.

Зависимость между моментами инерции сечения относительно параллельных осей

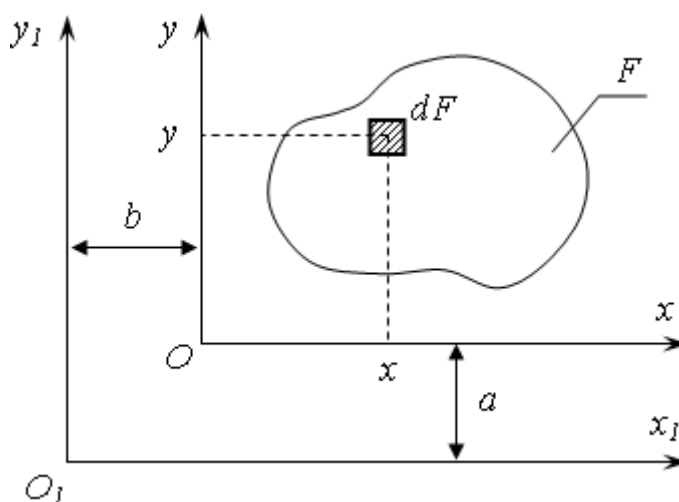


Рис. 1.2

Координаты произвольной точки в декартовой системе координат xOy в другой системе координат $x_1O_1y_1$ могут быть определены выражениями:

$$x_1 = x + b$$

$$y_1 = y + a$$

Тогда моменты инерции сечения относительно осей x_1 и y_1 могут быть выражены через моменты инерции того же сечения относительно осей x и y по формулам:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F (y^2 + 2ya + a^2) dF = \\ &= \int_F y^2 dF + \int_F 2yadF + \int_F a^2 dF = I_x + 2a \int_F ydF + a^2 \int_F dF = \\ &= I_x + 2aS_x + a^2F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_F x_1^2 dF = \int_F (x + b)^2 dF = \int_F (x^2 + 2xb + b^2) dF = \\ &= \int_F x^2 dF + \int_F 2xbdF + \int_F b^2 dF = I_y + 2b \int_F xdF + b^2 \int_F dF = \\ &= I_y + 2bS_y + b^2F \end{aligned}$$

Аналогично центробежный момент инерции сечения:

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x + b)(y + a) dF = \int_F (xy + by + ax + ab) dF =$$

$$= \int_F xy dF + b \int_F y dF + a \int_F x dF + ab \int_F dF = I_{xy} + bS_x + aS_y + abF$$

Если оси xOy центральные, т.е. проходят через центр тяжести сечения, то статические моменты S_x, S_y равны нулю и зависимость между моментами инерции при переходе от центральных осей к любым параллельным осям упрощается к виду:

$$I_{x_1} = I_x + a^2 F$$

$$I_{y_1} = I_y + b^2 F$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abF$$

При переходе от нецентральных осей к также нецентральных слагаемые с S_x, S_y должны быть сохранены, т.е.:

$$I_{x_1} = I_x + 2aS_x + a^2 F$$

$$I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2 F$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + bS_x + aS_y + abF$$

Изменение моментов инерции сечения при повороте осей координат

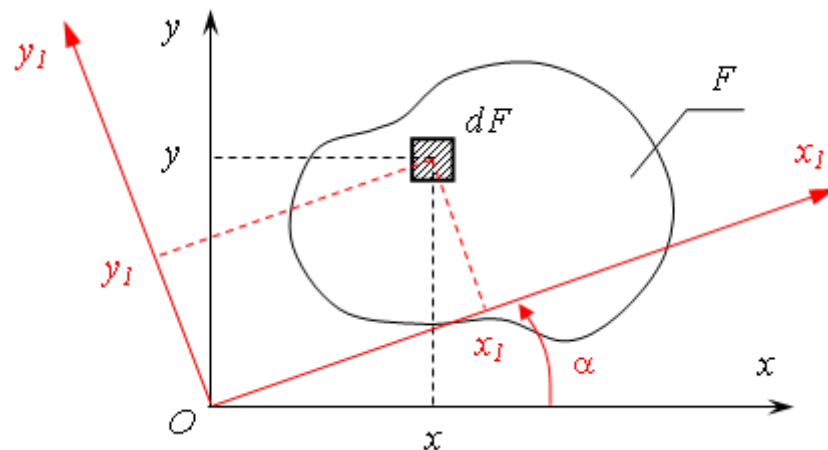


Рис. 1.3

Повернем декартовую систему координат xOy вокруг начала координат против часовой стрелки на угол α и образуем новую систему координат x_1Oy_1 . Координаты произвольной точки в новой повернутой системе координат можно выразить через ее координаты в исходной системе следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\y_1 &= y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha\end{aligned}$$

Выразим осевые моменты инерции сечения относительно повернутых осей Ox_1 и Oy_1 через осевые моменты инерции относительно исходных осей Ox и Oy :

$$\begin{aligned}I_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 dF = \\&= \int_F (y^2 \cdot \cos^2 \alpha - 2xy \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + x^2 \cdot \sin^2 \alpha) dF = \\&= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F xy dF + \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF = \\&= I_x \cdot \cos^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{y_1} &= \int_F x_1^2 dF = \int_F (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 dF = \\&= \int_F (x^2 \cdot \cos^2 \alpha + 2xy \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + y^2 \cdot \sin^2 \alpha) dF = \\&= \cos^2 \alpha \int_F x^2 dF + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F xy dF + \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF = \\&= I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha + I_x \cdot \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

Центробежный момент инерции сечения при повороте осей:

$$\begin{aligned}I_{x_1y_1} &= \int_F x_1y_1 dF = \int_F (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)(y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) dF = \\&= \int_F (xy \cdot \cos^2 \alpha + y^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - x^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - xy \cdot \sin^2 \alpha) dF = \\&= \cos^2 \alpha \int_F xy dF + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F y^2 dF - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F x^2 dF - \sin^2 \alpha \int_F xy dF = \\&= I_{xy} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + I_x \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - I_y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

или после упрощения:

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

Таким образом, при повороте осей моменты инерции сечения изменяются согласно выражениям:

$$I_{x_1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha$$

$$I_{y_1} = I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha$$

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

Поскольку $\rho^2 = x^2 + y^2$, то полярный момент инерции сечения может быть представлен суммой двух осевых моментов инерции. Если система координат x_1Oy_1 повернута относительно системы xOy вокруг точки O , тогда $\rho^2 = x_1^2 + y_1^2$. Следовательно, при повороте осей координат сумма осевых моментов инерции остается величиной постоянной, т.е.

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1}$$

При разных углах поворота α системы координат x_1Oy_1 относительно системы xOy осевые моменты инерции одного и того же сечения будут принимать различные значения, а значит можно подобрать такой угол α , при котором один из осевых моментов инерции сечения, например I_{x_1} , примет максимальное из возможных значений. В этом случае

$$\frac{\partial I_{x_1}}{\partial \alpha} = 0$$

Подставив выражение для I_{x_1} получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{x_1}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial (I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha)}{\partial \alpha} = \\ &= -2I_x \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2I_y \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = \\ &= (I_x - I_y) \sin 2\alpha + 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, максимальное значение I_{x_1} принимает при значении угла α , для которого

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения обращается в нуль, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются главными осями сечения. Осевые моменты инерции сечения относительно главных осей называются главными моментами инерции сечения. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

Особенность главных осей сечения заключается еще и в том, что если относительно одной главной оси осевой момент инерции приобретает максимальное значение, то относительно другой главной оси (перпендикулярной ей) осевой момент инерции сечения принимает минимальное свое значение.

Положение главных осей инерции сечения в данной точке сечения относительно исходных осей координат определяется выражением

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

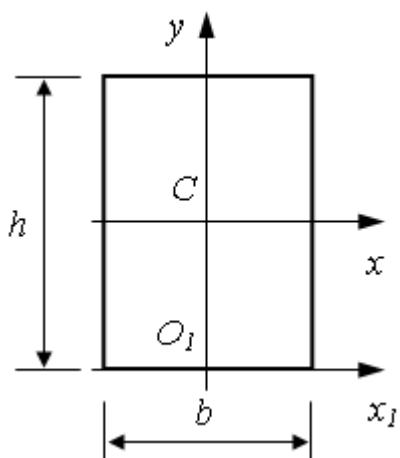
Главные моменты инерции сечения обозначаются как I_1 и I_2 и определяются по формулам:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Знак «плюс» перед радикалом соответствует большему из главных моментов инерции сечения I_1 , знак «минус» - меньшему моменту инерции I_2 .

Моменты инерции простейших фигур

Прямоугольник



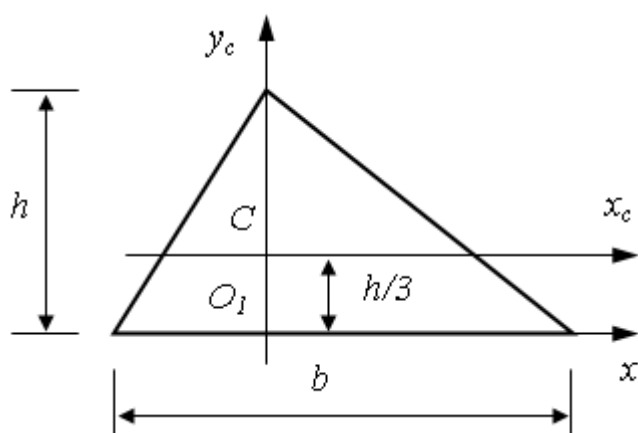
Осевые моменты инерции прямоугольного сечения:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$I_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Треугольник



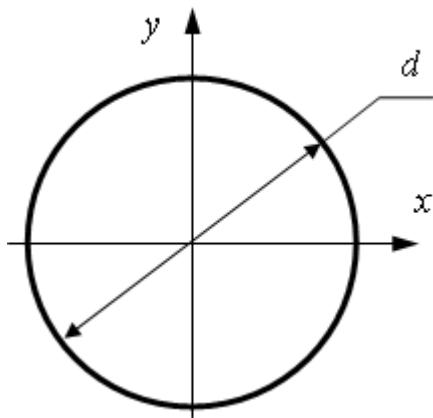
Осевые моменты инерции треугольного сечения:

$$I_{x_c} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

$$I_{y_c} = \frac{h \cdot b^3}{48}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Круг

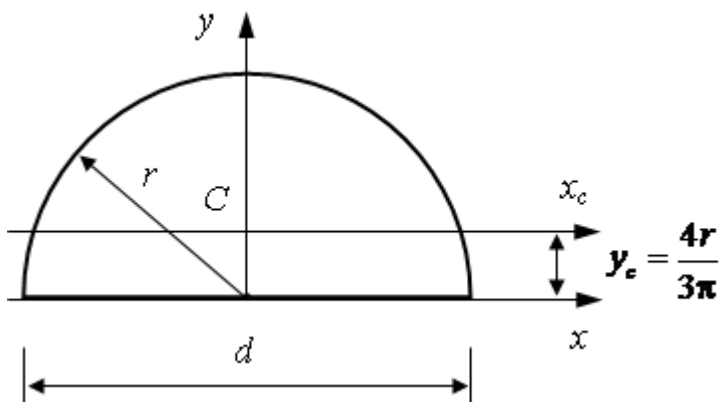


Осевые моменты инерции круглого сечения:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

Полукруг



Осевые моменты инерции полукруглого сечения:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{128}$$

$$I_{x_c} = 0,11r^4$$

Примеры решения задач

Задача 1.1

Для заданного сечения определить положение центра тяжести, осевые моменты инерции, осевые радиусы инерции и моменты сопротивления сечения, а также положение главных центральных осей и главных моментов инерции сечения.

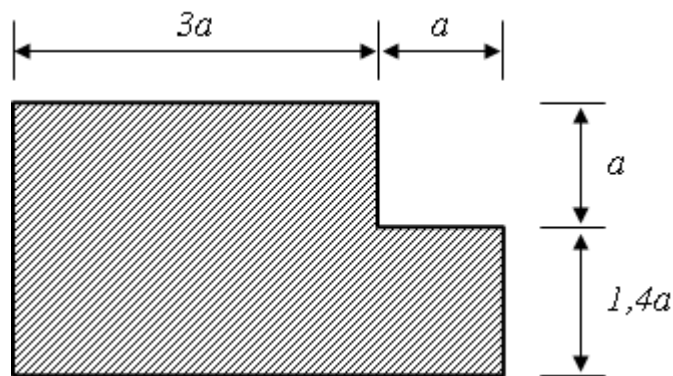


Рис. 1.4

Решение

Разобьем сечение на простейшие фигуры, для каждой из которых известны положения центров тяжести и моменты инерции.

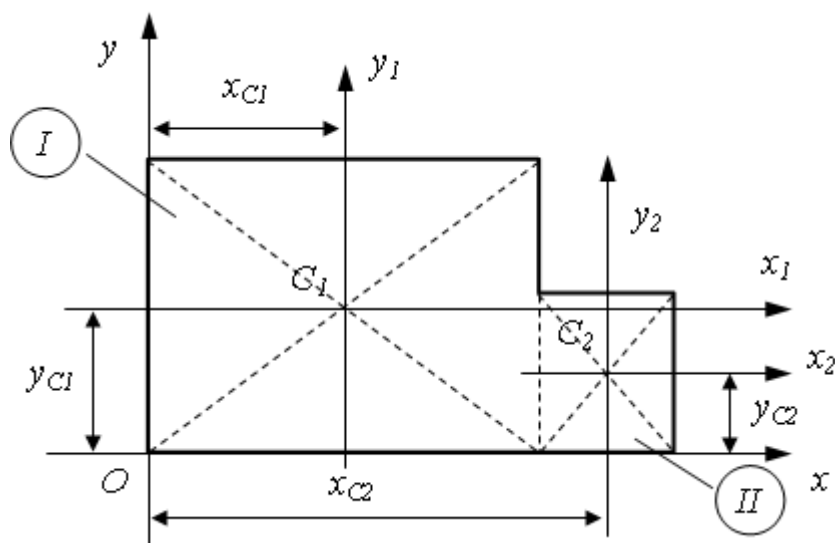


Рис. 1.5

Вычислим статические моменты каждой из фигур относительно общих осей xOy :

$$S_x^I = F_1 \cdot y_{C1} = (3a \cdot 2,4a) \cdot 1,2a = 8,64a^3$$

$$S_y^I = F_1 \cdot x_{C1} = (3a \cdot 2,4a) \cdot 1,5a = 10,8a^3$$

$$S_x^{II} = F_2 \cdot y_{C2} = (a \cdot 1,4a) \cdot 0,7a = 0,98a^3$$

$$S_y^{II} = F_2 \cdot x_{C2} = (a \cdot 1,4a) \cdot 3,5a = 4,9a^3$$

Вычислим координаты центра тяжести сечения:

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum F} = \frac{S_y^I + S_y^{II}}{F_1 + F_2} = \frac{10,8a^3 + 4,9a^3}{7,2a^2 + 1,4a^2} = \frac{15,7a}{8,6} = 1,83a$$

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F} = \frac{S_x^I + S_x^{II}}{F_1 + F_2} = \frac{8,64a^3 + 0,98a^3}{7,2a^2 + 1,4a^2} = \frac{9,62a}{8,6} = 1,12a$$

Откладываем в системе координат xOy полученные значения координат центра тяжести сечения.

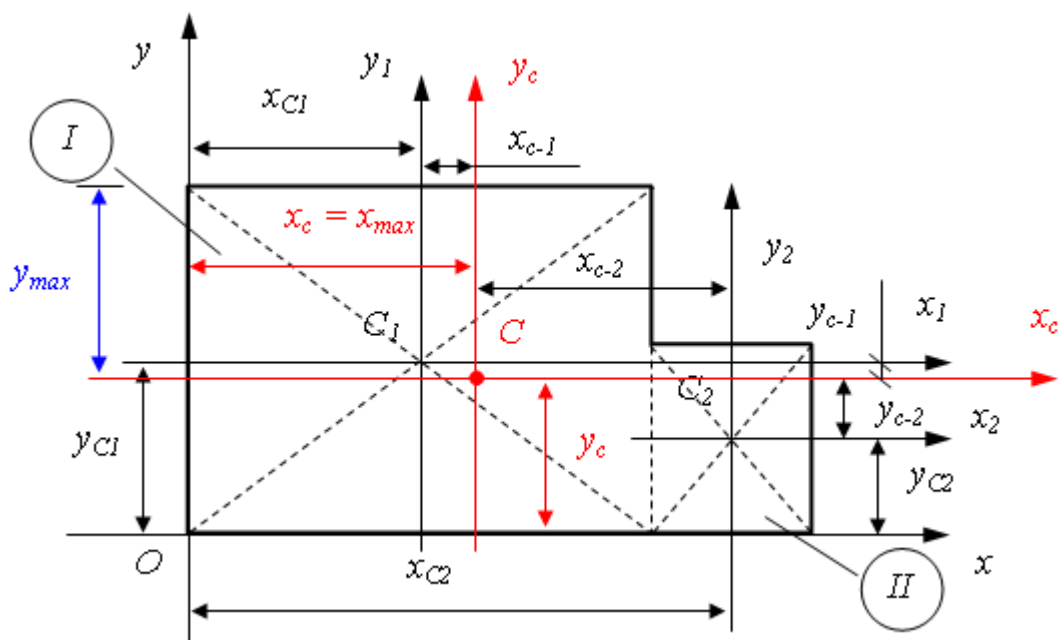


Рис. 1.6

Вычислим осевые моменты инерции каждой из фигур относительно центральных осей сечения x_cCy_c с помощью формул параллельного переноса осей, а также осевые моменты инерции сечения.

$$I_{x_c}^I = I_{x_1}^I + y_{c-1}^2 \cdot F_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + (y_{c1} - y_c)^2 F_1 =$$

$$= \frac{3a \cdot (2,4a)^3}{12} + (1,2a - 1,12a)^2 \cdot 7,2a^2 = 3,456a^4 + 0,046a^4 = 3,502a^4$$

$$I_{x_c}^{II} = I_{x_2}^{II} + y_{c-2}^2 \cdot F_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + (y_c - y_{c2})^2 F_2 =$$

$$= \frac{a \cdot (1,4a)^3}{12} + (1,12a - 0,7a)^2 \cdot 1,4a^2 = 0,229a^4 + 0,247a^4 = 0,476a^4$$

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} = 3,502a^4 + 0,476a^4 = 3,978a^4$$

$$I_{y_c}^I = I_{y_1}^I + x_{c-1}^2 \cdot F_1 = \frac{b_1^3 h_1}{12} + (x_c - x_{c1})^2 F_1 =$$

$$= \frac{(3a)^3 \cdot (2,4a)}{12} + (1,83a - 1,5a)^2 \cdot 7,2a^2 = 5,4a^4 + 0,784a^4 = 6,184a^4$$

$$I_{y_c}^{II} = I_{y_2}^{II} + x_{c-2}^2 \cdot F_2 = \frac{b_2^3 h_2}{12} + (x_{c2} - x_c)^2 F_2 =$$

$$= \frac{a^3 \cdot (1,4a)}{12} + (3,5a - 1,83a)^2 \cdot 1,4a^2 = 0,117a^4 + 3,904a^4 = 4,021a^4$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} = 6,184a^4 + 4,021a^4 = 10,205a^4$$

Вычислим радиусы инерции сечения относительно центральных осей:

$$i_{x_c} = \sqrt{\frac{I_{x_c}}{\sum F}} = \sqrt{\frac{3,978a^4}{8,6a^2}} = 0,68$$

$$i_{y_c} = \sqrt{\frac{I_{y_c}}{\sum F}} = \sqrt{\frac{10,205a^4}{8,6a^2}} = 1,09$$

Вычислим моменты сопротивления сечения относительно центральных осей:

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{|y_{\max}|} = \frac{3,978a^4}{1,28a} = 3,11a^3$$

$$W_{y_c} = \frac{I_{y_c}}{|x_{\max}|} = \frac{10,205a^4}{1,83a} = 5,58a^3$$

Определим положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}}$$

Вычислим центробежный момент инерции каждой из фигур, а после этого центробежный момент инерции сечения:

$$I_{x_c y_c}^I = F_1 \cdot x_{c-1} \cdot y_{c-1} = 7,2a^2 \cdot (-0,33a) \cdot 0,08a = -0,19a^4$$

$$I_{x_c y_c}^{II} = F_2 \cdot x_{c-2} \cdot y_{c-2} = 1,4a^2 \cdot 1,67a \cdot (-0,42a) = -0,98a^4$$

$$I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^I + I_{x_c y_c}^{II} = -0,19a^4 + (-0,98a^4) = -1,17a^4$$

Вычислим угол поворота главных осей относительно центральных осей сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-1,17a^4)}{3,978a^4 - 10,205a^4} = -\frac{-2,34}{-6,227} = -0,376$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-0,376) = -10,3^\circ$$

Знак минус означает, что главная центральная ось повернута на $10,3^\circ$ по часовой стрелке относительно положительного направления оси Sx_c .

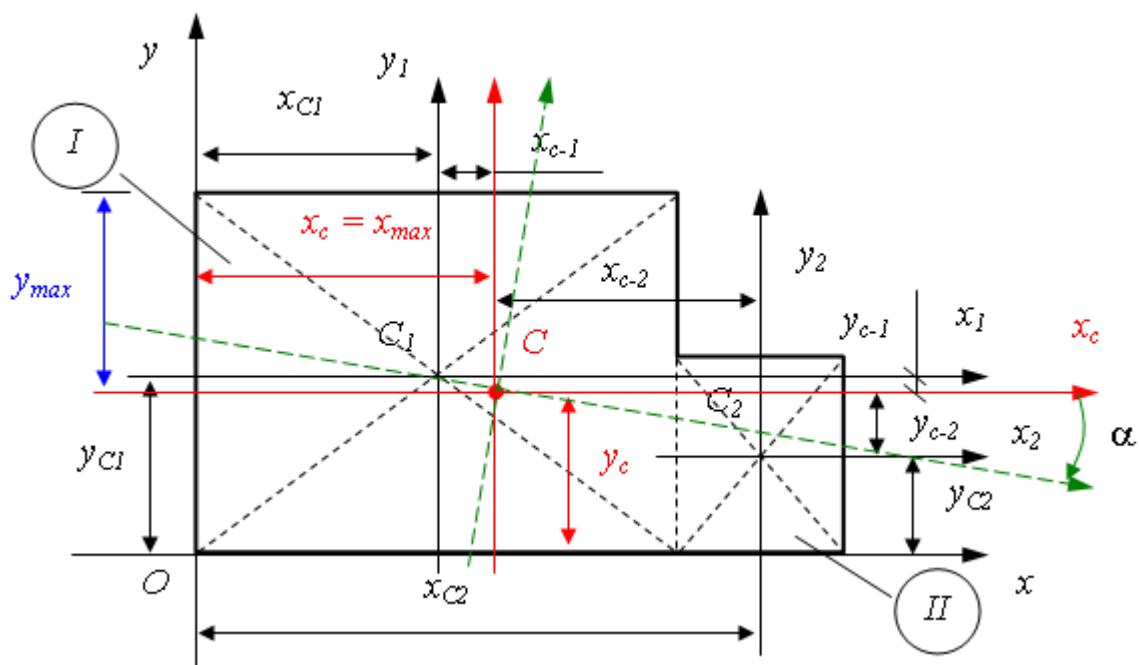


Рис. 1.7

Определим главные моменты инерции сечения.

$$I_{1,2} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2}$$

$$I_{1,2} = \frac{3,978a^4 + 10,205a^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,978a^4 - 10,205a^4}{2}\right)^2 + (-1,17a^4)^2} =$$

$$= 7,092a^4 \pm a^4 \sqrt{9,694 + 1,369} = 7,092a^4 \pm 3,326a^4$$

$$I_1 = 7,092a^4 + 3,326a^4 = 10,418a^4$$

$$I_2 = 7,092a^4 - 3,326a^4 = 3,766a^4$$

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ИЗГИБЕ

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны оси кривого бруса. Осью бруса называется геометрическое место точек центров тяжести поперечных сечений бруса, т.е. сечений, нормальных к оси бруса.

Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса изгибающих моментов. Если из шести внутренних силовых факторов в сечении бруса отличным от нуля является только один изгибающий момент, то изгиб называется чистым. Если в поперечных сечениях бруса кроме изгибающего момента действует также поперечная сила, то изгиб называется поперечным.

Брус, работающий на изгиб, называется балкой.

Изгиб называется плоским, если ось балки после деформации остается плоской линией. Плоскость расположения изогнутой оси балки называется плоскостью изгиба. Плоскость действия внешних сил называется силовой плоскостью.

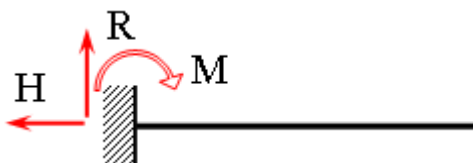
Если силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения, изгиб называется прямым. В противном случае имеет место кривой изгиб.

Особенности характерные для изгиба балки

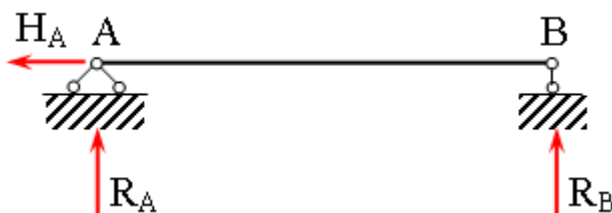
1. На выпуклой стороне балки волокна растягиваются, а на вогнутой – сжимаются.
2. Переход от сжатых волокон к растянутым и наоборот происходит непрерывно, между сжатыми и растянутыми волокнами есть нейтральный слой, т.е. волокна, длина которых при изгибе не изменяется.
3. В растянутой зоне поперечные сечения сужаются, а в сжатой – расширяются.
4. Плоские поперечные сечения, нормальные к оси балки до изгиба, остаются плоскими и нормальными к ней после изгиба (гипотеза плоских сечений Бернулли).
5. Продольные волокна не оказывают давления друг на друга, а испытывают только осевое растяжение или сжатие.

Для закрепления балки необходимо наложить 3 связи. Это можно сделать 3 способами:

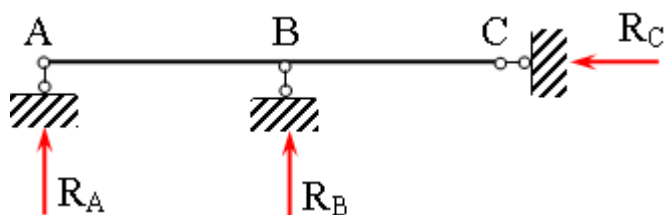
1. Закрепление с одного конца – консольная балка



2. Закрепление двумя шарнирными опорами (подвижной и неподвижной) – простая шарнирно-опертая балка



3. Закрепление тремя шарнирно-подвижными опорами



При подобном типе закрепления балки оси всех трех опор не должны быть параллельны и не должны пересекаться в одной точке.

ОПОРНЫЕ РЕАКЦИИ

Опорные реакции определяются на основании уравнений равновесия.

Уравнения равновесия для плоской системы сил могут быть записаны в 3 вариантах:

1. Сумма проекций всех сил на ось X равна нулю, сумма проекций всех сил на ось Y равна нулю и сумма моментов всех сил относительно любой точки равна нулю.

2. Сумма моментов всех сил относительно первой опоры равна нулю, сумма моментов всех сил относительно второй опоры равна нулю и сумма проекций всех сил на ось Y равна нулю.

3. Сумма моментов всех сил относительно каждой из трех опор равна нулю (если три опоры расположены не на одной прямой).

Уравнения равновесия составляют таким образом, чтобы в каждое из них входило только одно неизвестное усилие.

Балки, в которых число неизвестных усилий равно числу уравнений статики, называются статически определимыми балками.

Расчет прочности балок производится применительно к наиболее нагруженному, т.е. опасному сечению. Выявление опасных сечений производится при помощи эпюр, т.е. графиков, изображающих закон изменения поперечных сил и изгибающих моментов по всей длине балки.

Для построения эпюр внутренних усилий в балке необходимо выполнить следующие действия:

- 1) определить опорные реакции;

2) определить величины поперечных сил Q и изгибающих моментов M на каждом участке балки в наиболее характерных точках (начало и конец участка, экстремальные точки);

3) в соответствующих местах восстановить перпендикуляры к оси балки, численно равные найденным характерным значениям поперечных сил и изгибающих моментов;

4) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, соединяя концы перпендикуляров в соответствии с законом изменения Q и M на данном участке.

Правила знаков для поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балки определяются на основании рис.2.1.

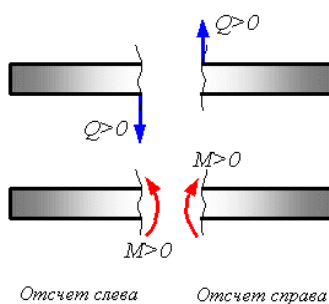


Рис. 2.1

При этом положительные значения изгибающих моментов оказываются с той стороны от оси балки, в которую обращается выпуклая сторона балки, т.е. эпюра изгибающих моментов строится со стороны растянутых волокон.

При построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в балках необходимо учитывать следующее:

1. При построении эпюр в шарнирно-опертых балках в начале расчета необходимо определить реакции опор и учитывать их при построении эпюр как внешние нагрузки. Реакции опор в шарнирно-опертых балках определяют используя уравнения равновесия.

2. При построении эпюр в консольных балках опорные реакции можно не определять, если начинать построение эпюр со стороны свободного конца.

3. При действии на балку сосредоточенной силы, приложенной в некоторой точке, на эпюре «Q» в этой точке всегда будет скачок на величину силы.

4. При действии на балку сосредоточенного момента, приложенного в некоторой точке, на эпюре «M» в этой точке всегда будет скачок на величину момента.

5. При построении эпюры моментов в балке, на которую действует распределенная нагрузка, точки графика на участке действия распределенной нагрузки соединяются по параболе. При этом выпуклость параболы направлена в сторону действия распределенной нагрузки.

6. При действии на балку сосредоточенного момента опорные реакции не зависят от точки приложения момента.

Задача 2.1

В шарнирно-опертой балке построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от действия сосредоточенной силы, приложенной в центре пролета балки.

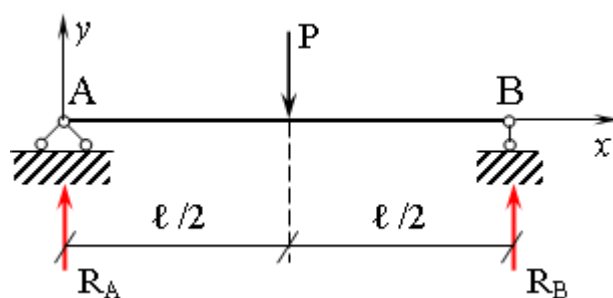


Рис. 2.2

Решение

1. Помещаем начало координат в крайнюю левую точку балки.
2. Определяем опорные реакции на основании уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0; P \cdot \frac{\ell}{2} - R_B \cdot \ell = 0; R_B = \frac{P}{2}$$

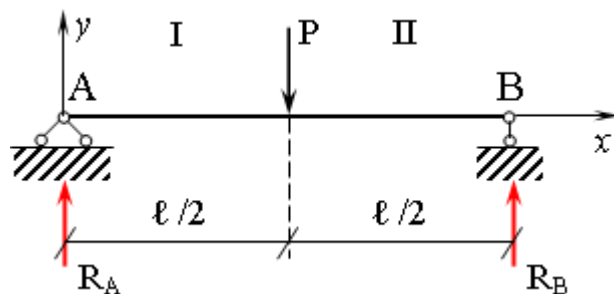
$$\sum M_B = 0; P \cdot \frac{\ell}{2} - R_A \cdot \ell = 0; R_A = \frac{P}{2}$$

3. Проверяем правильность нахождения опорных реакций $\sum Y = 0$

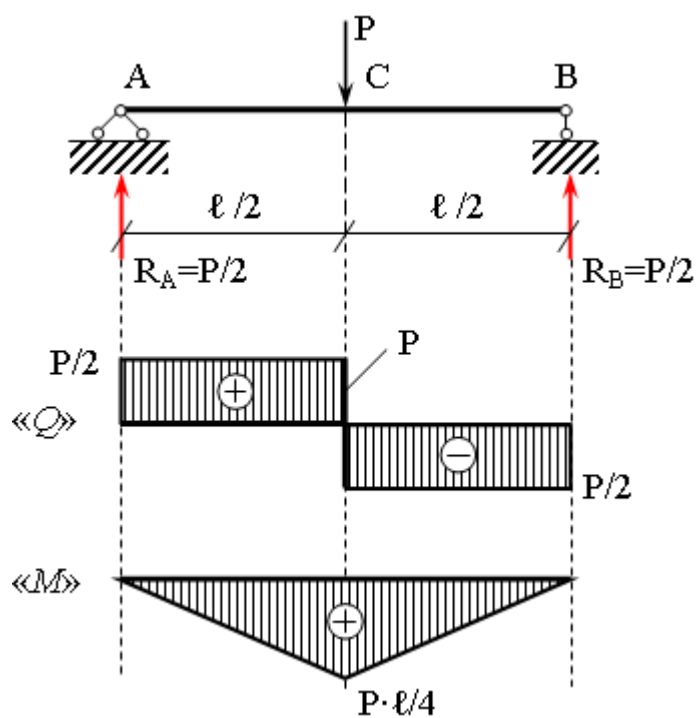
$$\sum Y = R_A - P + R_B = \frac{P}{2} - P + \frac{P}{2} = 0$$

$\sum Y = 0$, следовательно, опорные реакции найдены верно.

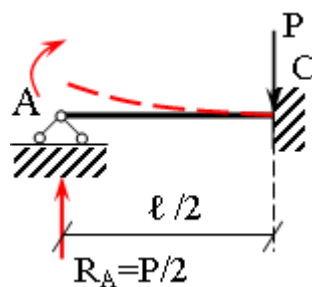
4. Разбиваем балку на грузовые участки, т.е. участки, в пределах которых нагрузка остается постоянной.



5. Определяем нагрузку в пределах каждого участка



Точка С:



Момент в точке С:

$$M_C = +\frac{P}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = +\frac{P \cdot \ell}{4}$$

Эпюра « M » откладывается со стороны растянутых волокон.

Задача 2.2

В шарнирно-опертой балке построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от действия распределенной нагрузки.

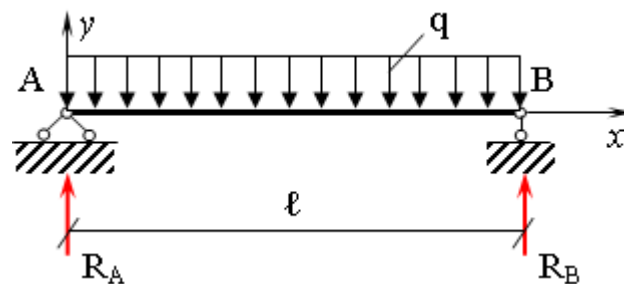
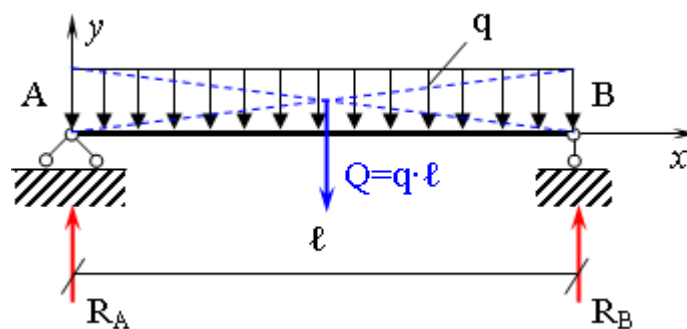


Рис. 2.3

1. Помещаем начало координат в крайнюю левую точку балки.
2. Определяем опорные реакции на основании уравнений равновесия, заменяя распределенную нагрузку эквивалентной сосредоточенной силой, приложенной в центре тяжести распределенной нагрузки:



$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} - R_B \cdot \ell = 0; \quad R_B = \frac{q \cdot \ell}{2}$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} - R_A \cdot \ell = 0; \quad R_A = \frac{q \cdot \ell}{2}$$

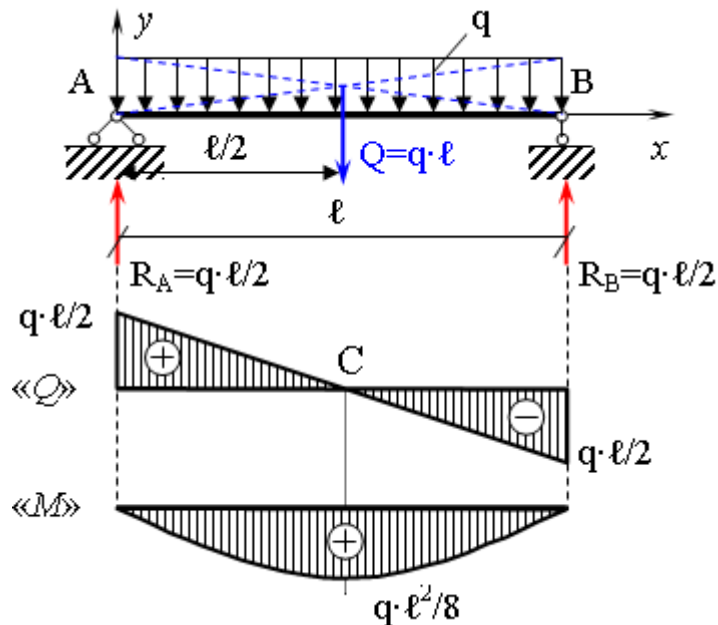
3. Проверяем правильность нахождения опорных реакций $\sum Y = 0$

$$\sum Y = R_A - Q + R_B = \frac{q \cdot \ell}{2} - q \cdot \ell + \frac{q \cdot \ell}{2} = 0$$

$\sum Y = 0$, следовательно, опорные реакции найдены верно.

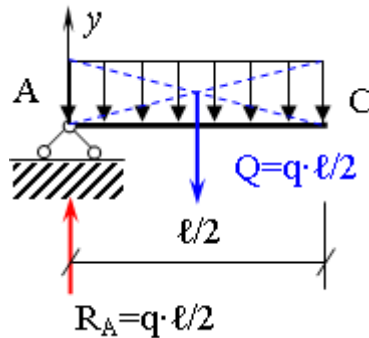
4. Разбиваем балку на грузовые участки, т.е. участки, в пределах которых нагрузка остается постоянной. В данном случае имеем один участок.

5. Определяем нагрузку в пределах участка



Т.к. эпюра « Q » симметрична, то точка пересечения эпюры с осью балки находится на расстоянии $\ell/2$ от крайней левой точки балки.

Момент в точке С балки:



$$M_C = + \frac{q \cdot \ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{4} = + \frac{q \cdot \ell^2}{4} - \frac{q \cdot \ell^2}{8} = \frac{q \cdot \ell^2}{8}$$

Задача 2.3

В консольной балке построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от действия сосредоточенной силы.

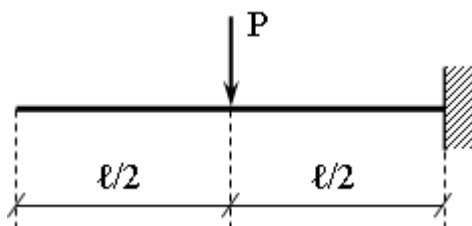
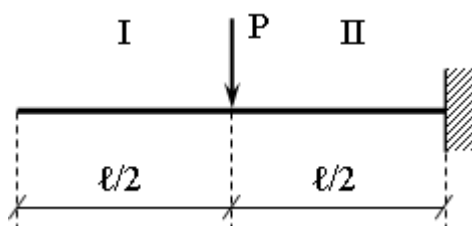


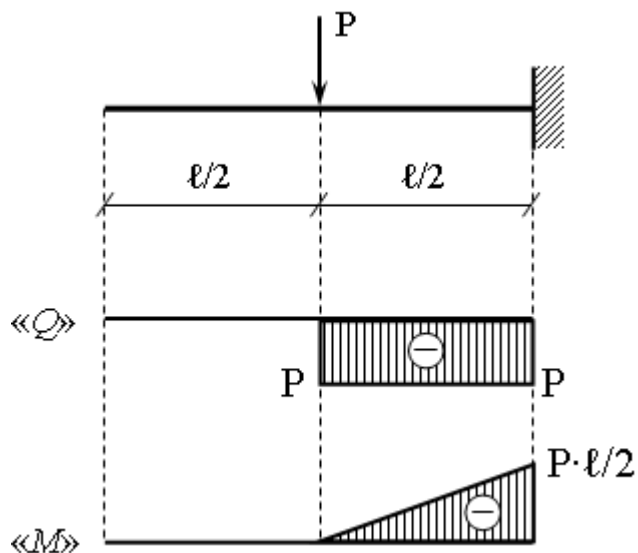
Рис. 2.4

1. Помещаем начало координат в крайнюю левую точку балки (со стороны свободного, т.е. не закрепленного конца).

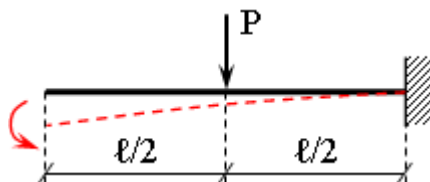
2. Разбиваем балку на грузовые участки, т.е. участки, в пределах которых нагрузка остается постоянной.



3. Определяем нагрузку в пределах каждого участка



Знак эпюры «M» «минус», т.к. растянуты верхние волокна балки.



Задача 2.4

В консольной балке построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от действия распределенной нагрузки.

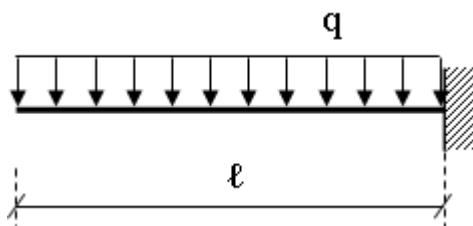
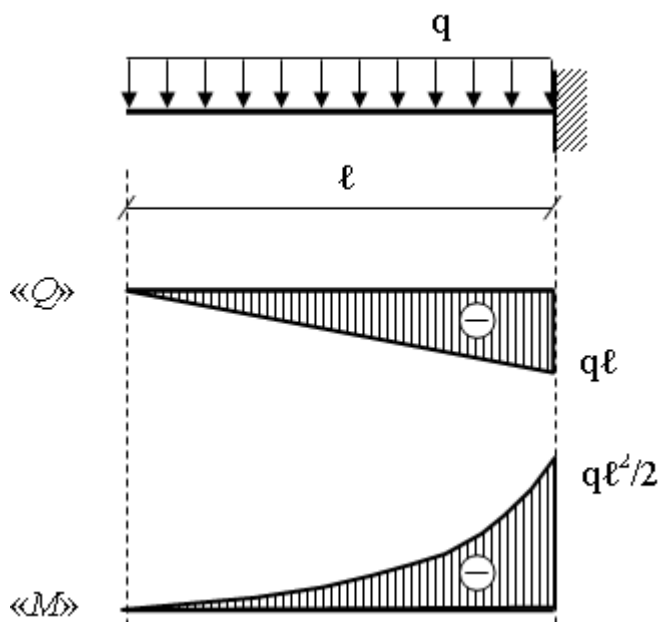


Рис. 2.5

Не определяя опорные реакции, строим эпюры со стороны не закрепленного конца балки, т.е. слева.



Задача 2.5

В шарнирно-опертой балке с консольной частью построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от действия заданных нагрузок.

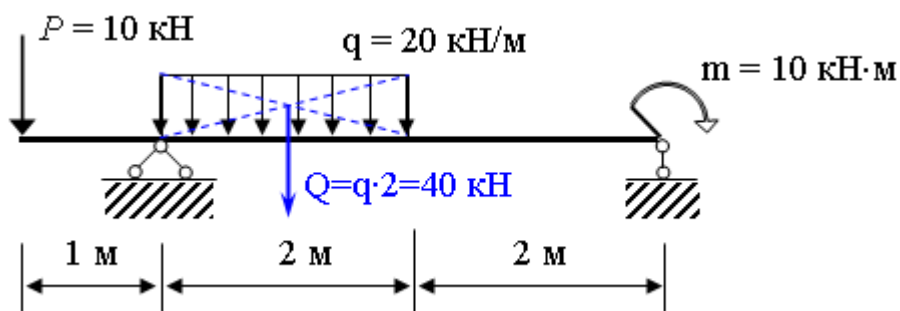
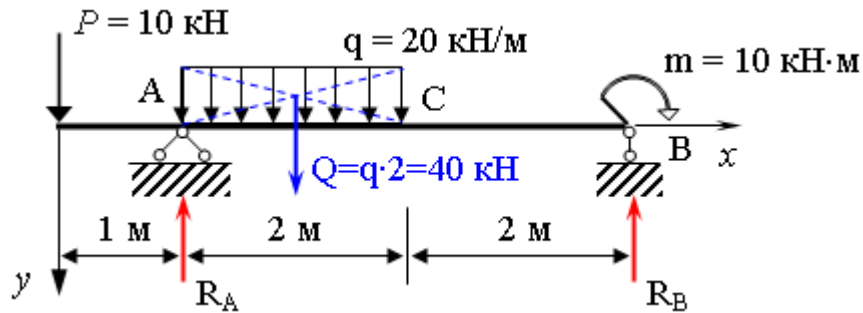


Рис. 2.6

1. Определяем опорные реакции в балке.



$$\sum M_A = 0; -P \cdot 1 + Q \cdot 1 + m - R_B \cdot 4 = 0$$

$$R_B = \frac{-P \cdot 1 + Q \cdot 1 + m}{4} = \frac{-10 + 40 + 10}{4} = 10 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; -P \cdot 5 + R_A \cdot 4 - Q \cdot 3 + m = 0$$

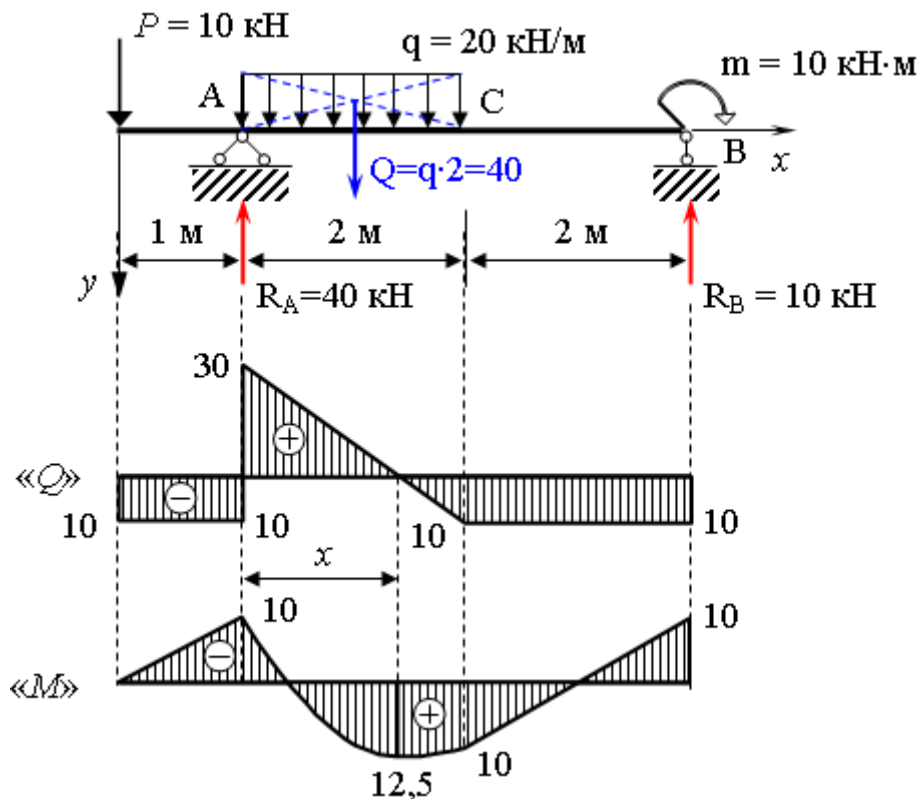
$$R_A = \frac{P \cdot 5 + Q \cdot 3 - m}{4} = \frac{50 + 120 - 10}{4} = 40 \text{ кН}$$

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0; P + Q - R_A - R_B = 10 + 40 - 40 - 10 = 0$$

Проверка выполняется, следовательно, опорные реакции определены верно.

2. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.



$$M_A = -P \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_C = -P \cdot 3 + R_A \cdot 2 - Q \cdot 1 = -30 + 80 - 40 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_B = -m = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Определяем координату x точки пересечения эпюры поперечных сил с осью балки (базисной линией), т.е. координату точки максимального значения момента на участке. Для этого рассматриваем подобие треугольников, на основании которого имеем

$$\frac{30}{x} = \frac{10}{2-x}$$

$$30(2-x) = 10x$$

$$40x = 60 \text{ следовательно } x = 1,5$$

Определяем значение максимального момента на рассматриваемом участке:

$$M(x) = -P(x+1) + R_A x - q \frac{x^2}{2} = -10 \cdot 2,5 + 40 \cdot 1,5 - 20 \frac{1,5^2}{2} = 12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

ГЛАВА 3. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №1

на тему:

«Определение геометрических характеристик поперечных сечений»

Задача № 1

Для симметричных сечений по схеме №1 при геометрических размерах по строке таблицы 1, соответствующей номеру варианта, требуется определить моменты инерции относительно главных центральных осей и моменты сопротивления сечения.

Задача № 2

Для сечений, имеющих одну ось симметрии, по схеме №2 при геометрических размерах по строке таблицы 1, соответствующей номеру варианта, требуется определить: положение центра тяжести; главные моменты инерции, главные радиусы инерции и моменты сопротивления для нижних и верхних волокон сечения.

Задача № 3

Для сечений по схеме №3 при геометрических размерах по строке таблицы 1, соответствующей номеру варианта, требуется:

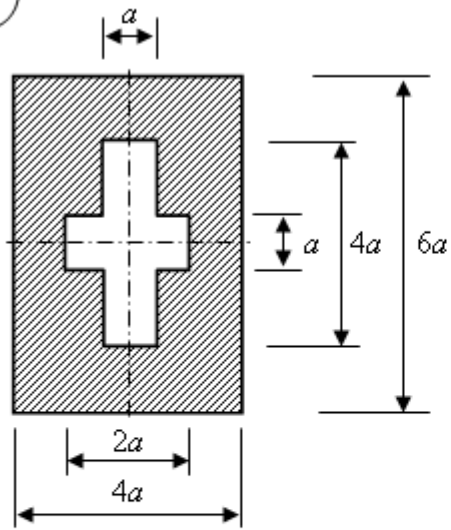
- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) вычислить осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей;
- 3) определить положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции.

Таблица 1

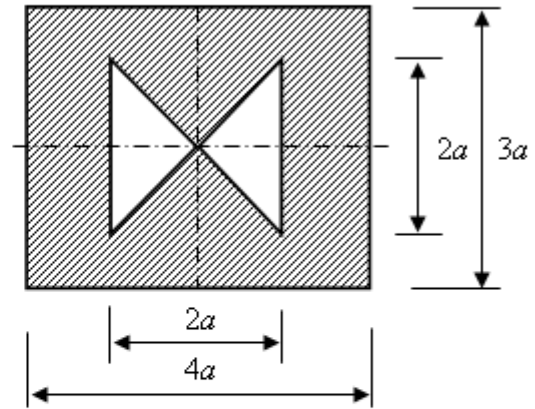
№ варианта	Номер двутавра по ГОСТ Р 57837-2017	Номер швеллера по ГОСТ 8240-97	Равнобокий уголок по ГОСТ 8509-93, мм	Неравнобокий уголок по ГОСТ 8510-86, мм	Лист, мм	a, см
1	12Б1	14У	80×80×6	100×63×6	140×10	5
2	14Б1	16П	90×90×6	100×63×8	160×12	6
3	14Б2	16У	90×90×8	110×70×6,5	110×10	8
4	18Б1	18У	100×100×8	100×65×8	180×12	10
5	18Б2	18П	100×100×12	125×80×7	200×10	12
6	20Б2	20У	110×110×7	125×80×8	200×12	4
7	20Б1	20П	110×110×8	125×80×10	180×16	16
8	25Б1	22П	125×125×8	140×90×8	220×12	15
9	25Б3	22У	125×125×10	140×90×10	220×14	18
10	12Б2	14П	80×80×7	100×63×7	170×10	14
11	16Б1	12У	90×90×9	80×60×8	160×12	6
12	16Б2	20У	90×90×7	110×70×8	180×10	5
13	18Б2	18П	100×100×10	100×65×10	180×12	10
14	18Б1	16У	100×100×7	125×80×12	200×14	8
15	20Б3	20У	110×110×7	125×80×8	200×18	4
16	20Б2	20П	110×110×8	100×63×10	200×16	16
17	25Б4	22П	125×125×12	125×80×7	220×10	15
18	25Б2	22У	125×125×14	140×90×10	300×14	10
19	10Б1	14У	75×75×6	90×56×6	160×8	8
20	12Б2	14П	75×75×8	90×56×8	160×14	5
21	14Б1	16П	70×70×8	80×60×7	160×8	6
22	16Б2	20У	70×70×6	110×70×6,5	180×18	4
23	18Б1	18У	100×100×14	100×63×8	180×12	10
24	18Б2	18П	100×100×16	125×80×8	200×8	12
25	20Б1	20П	75×75×9	125×80×12	200×15	14
26	16Б1	18У	70×70×5	90×56×5,5	120×10	8
27	30Б1	22П	63×63×5	100×65×8	240×8	16
28	16Б2	20У	63×63×6	140×90×8	1400×10	10
29	12Б1	14П	70×70×7	110×70×8	1200×12	20
30	14Б2	16У	80×80×5,5	125×80×7	710×10	5

Схема №1

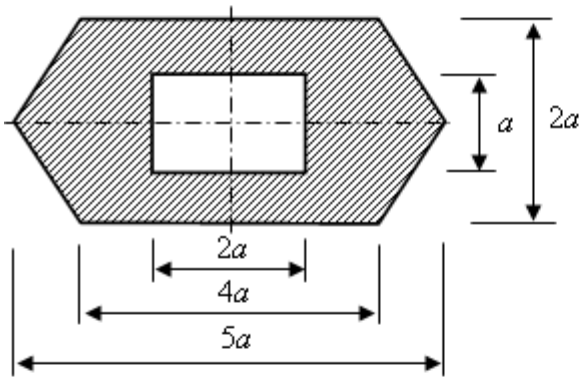
1



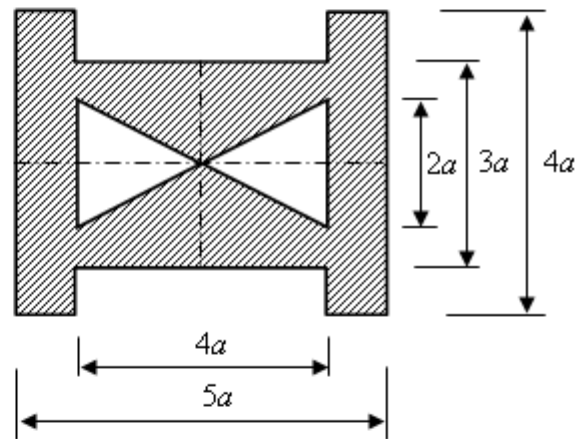
2



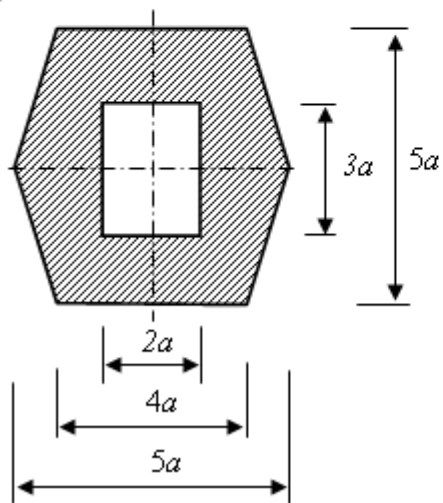
3



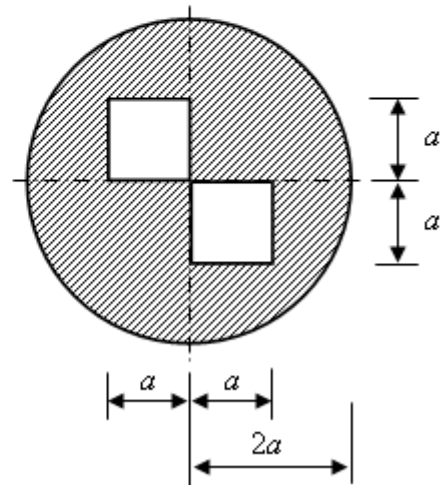
4

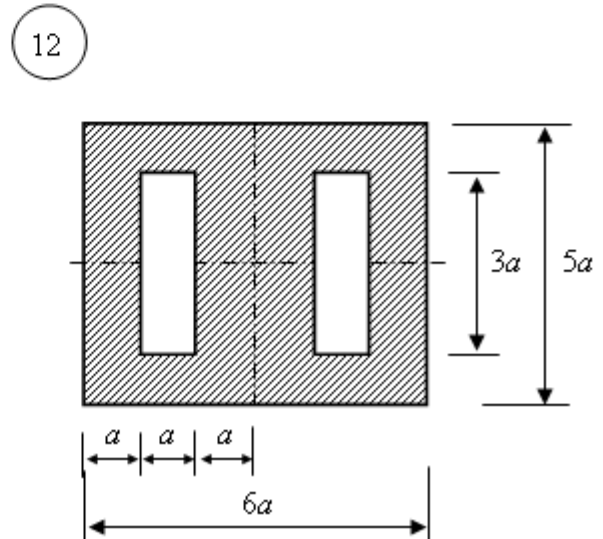
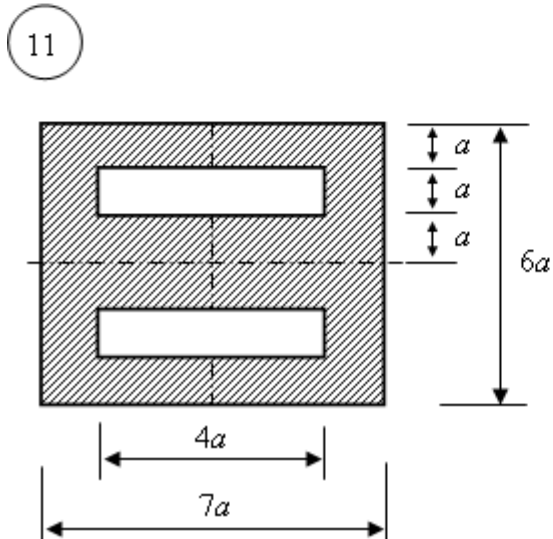
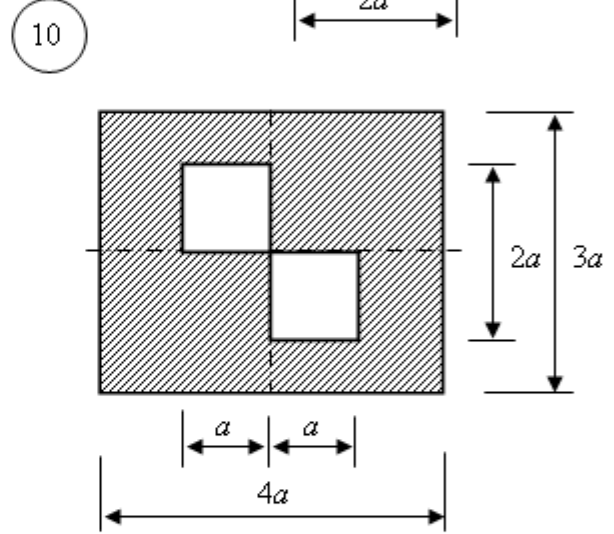
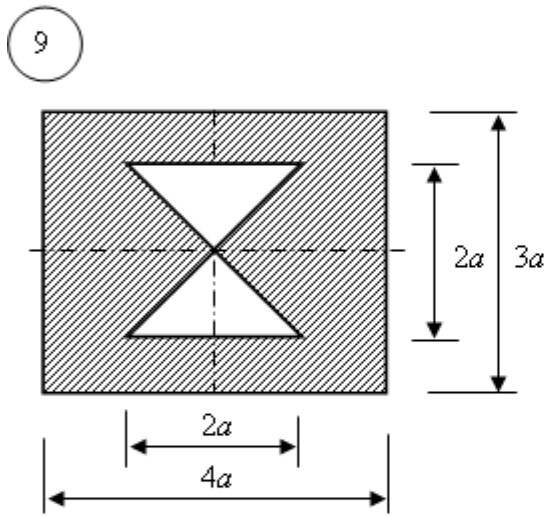
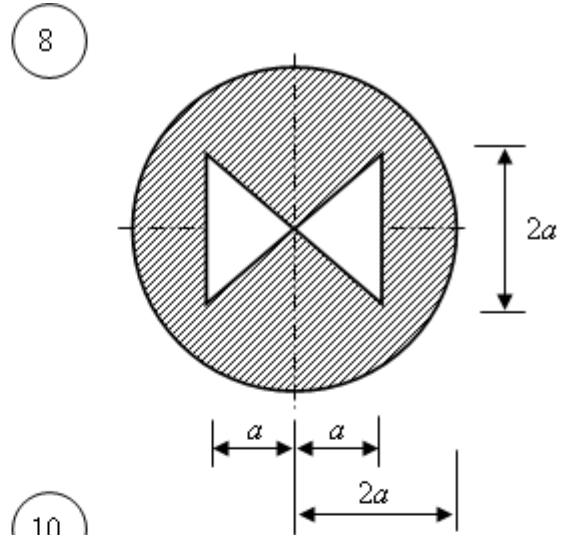
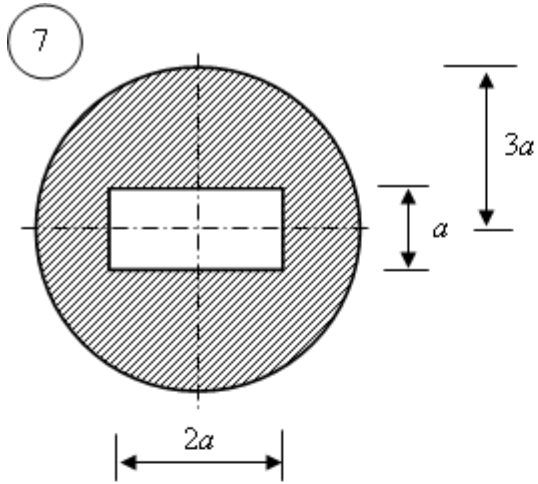


5

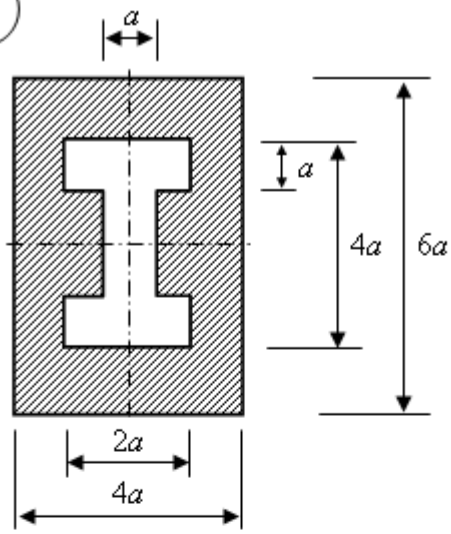


6

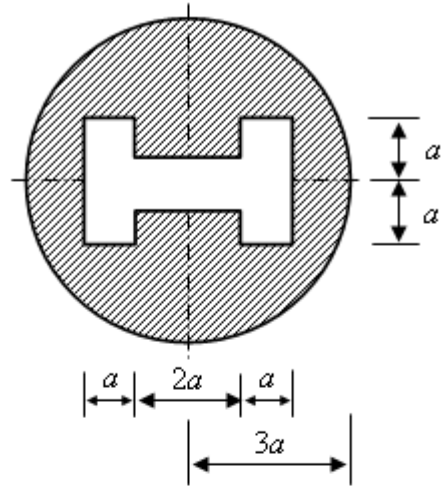




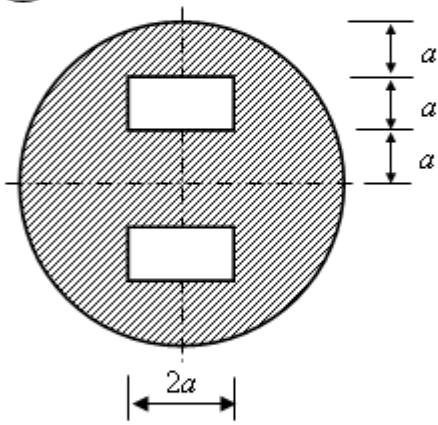
13



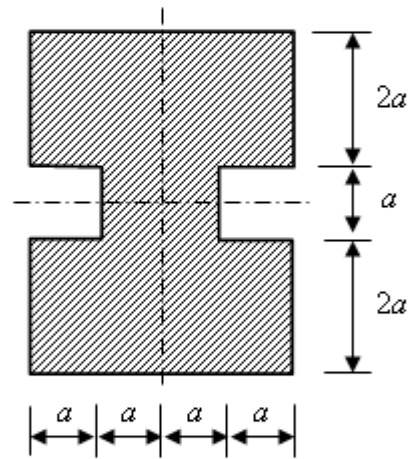
14



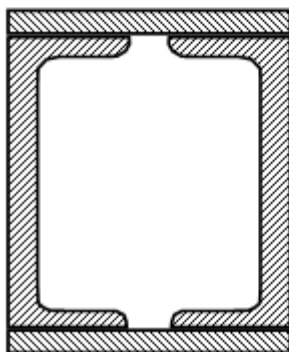
15



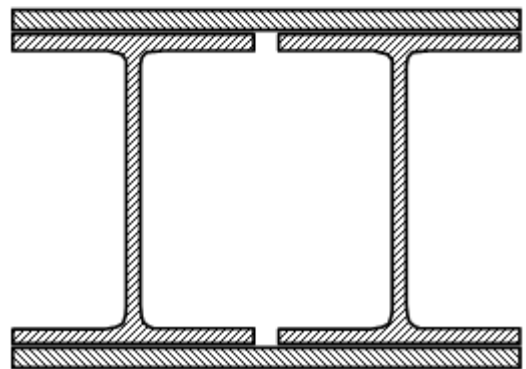
16



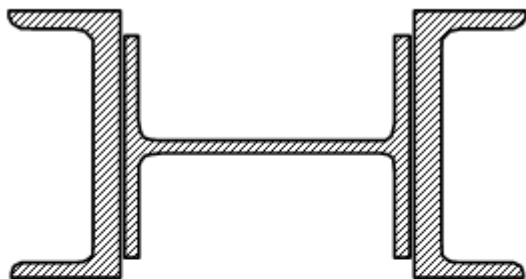
17



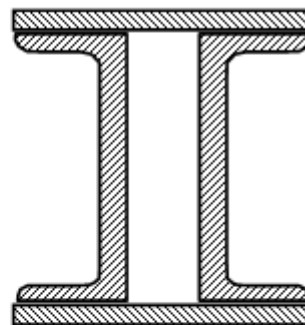
18



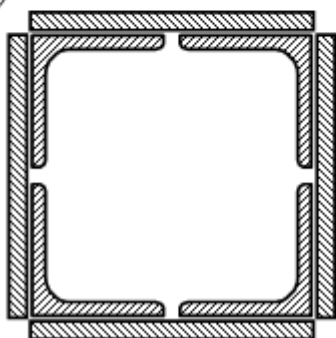
19



20



21



22

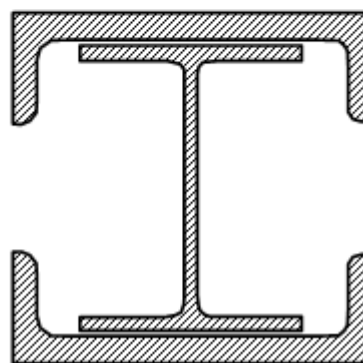
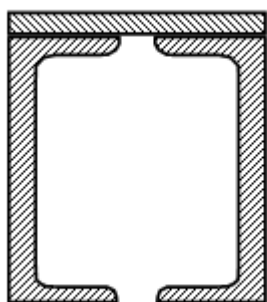
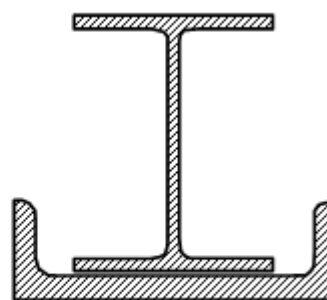


Схема №2

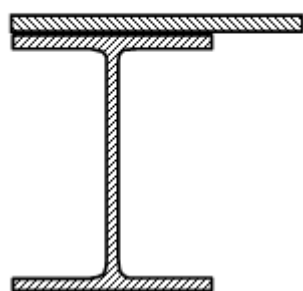
1



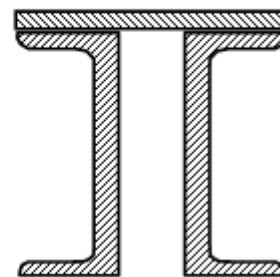
2



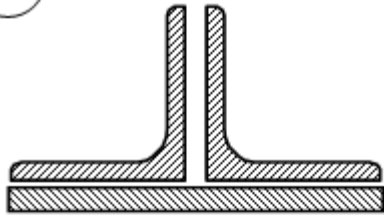
3



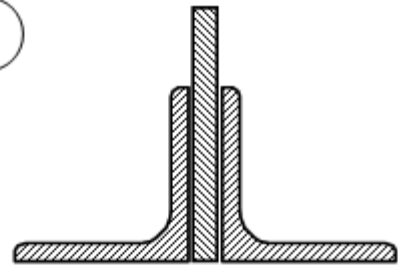
4



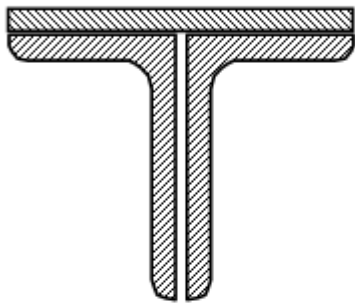
5



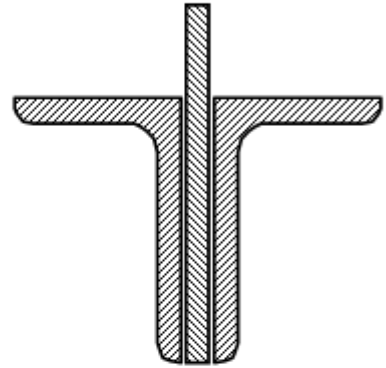
6



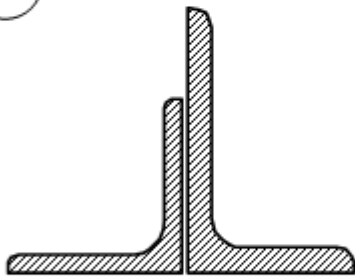
7



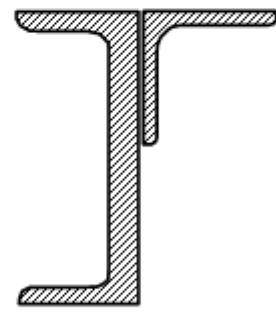
8



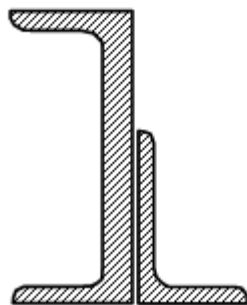
9



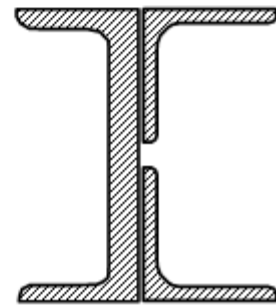
10



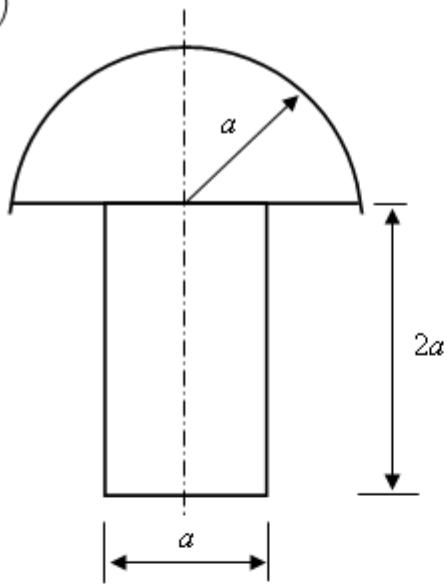
11



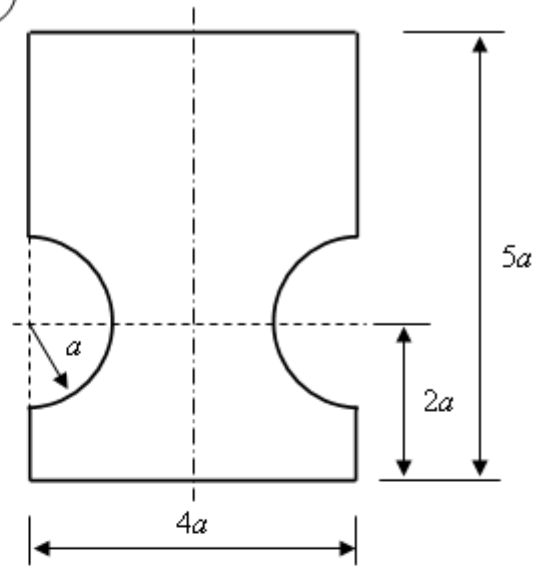
12



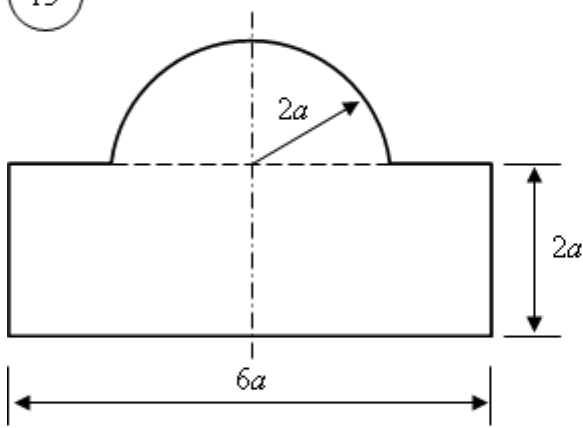
13



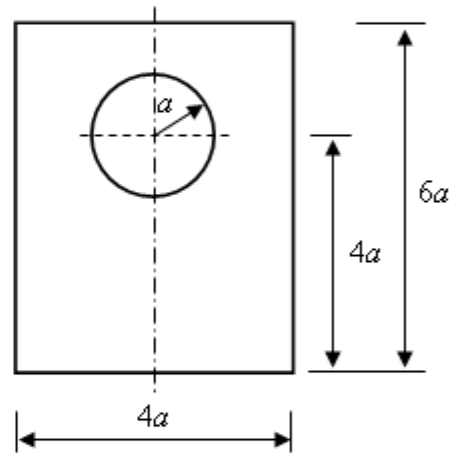
14



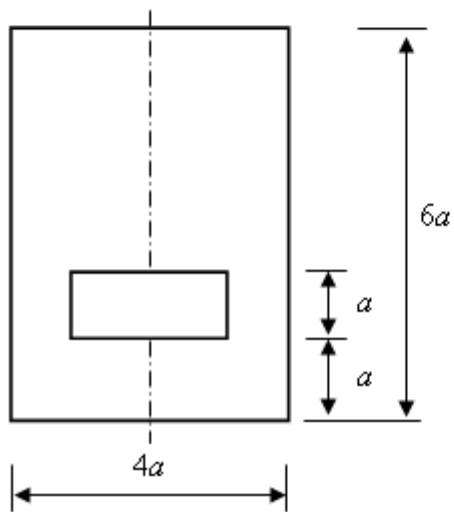
15



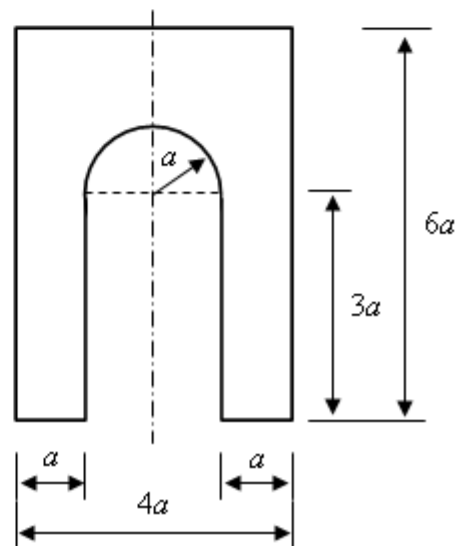
16



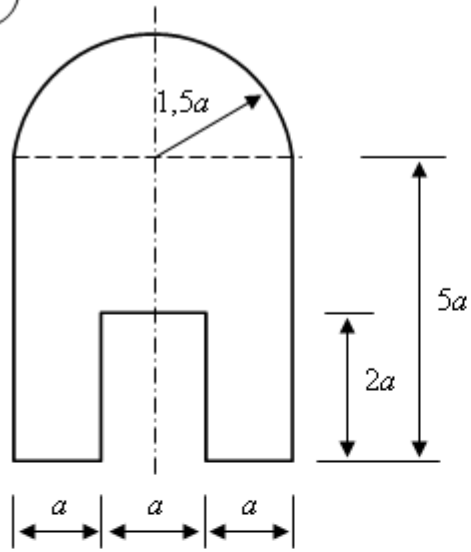
17



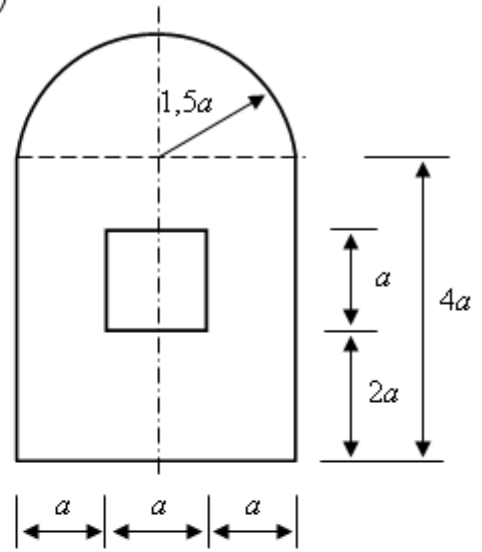
18



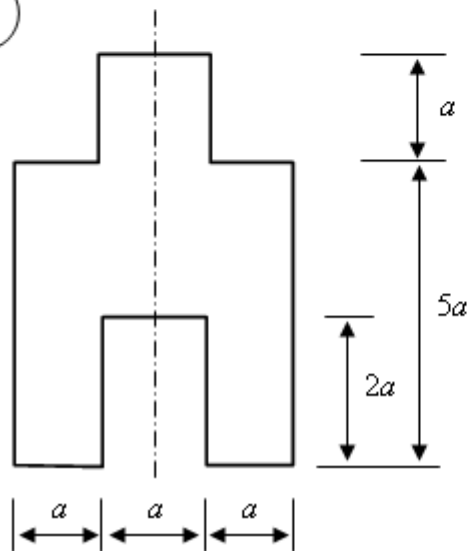
19



20



21



22

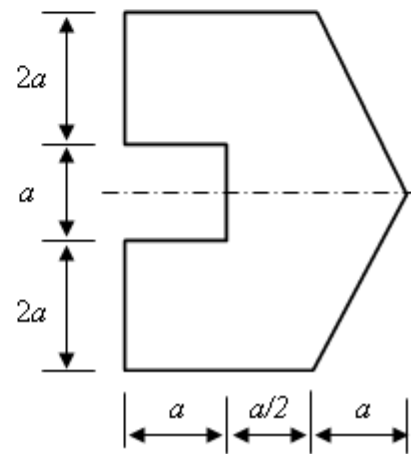
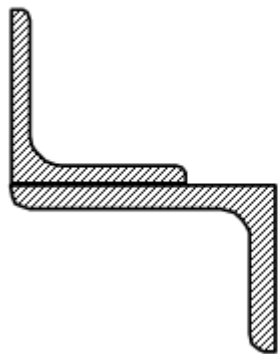
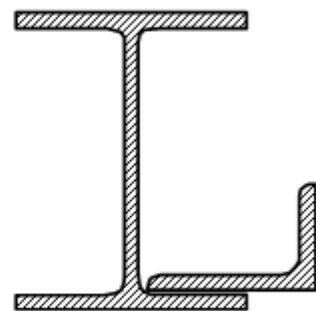


Схема №3

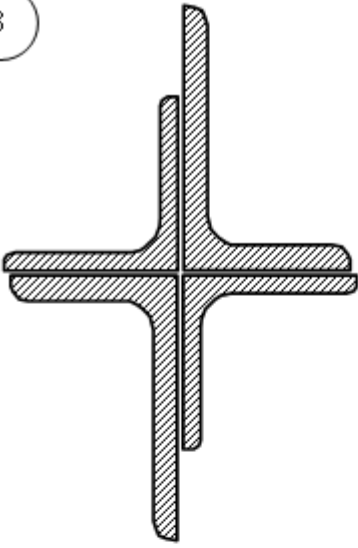
1



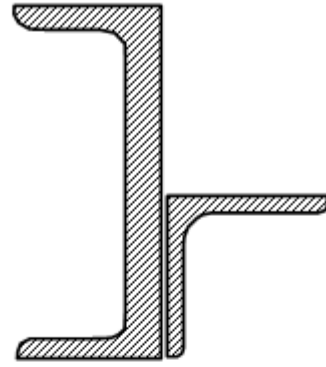
2



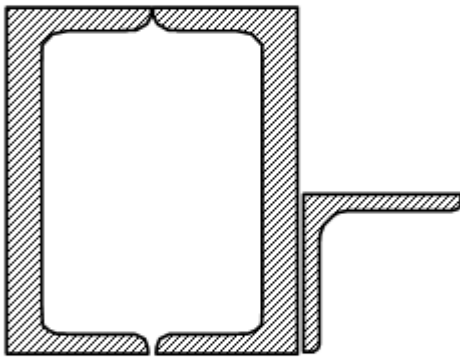
3



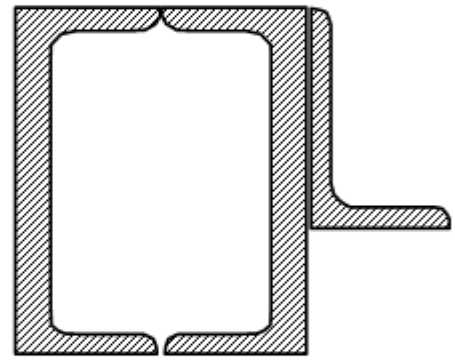
4



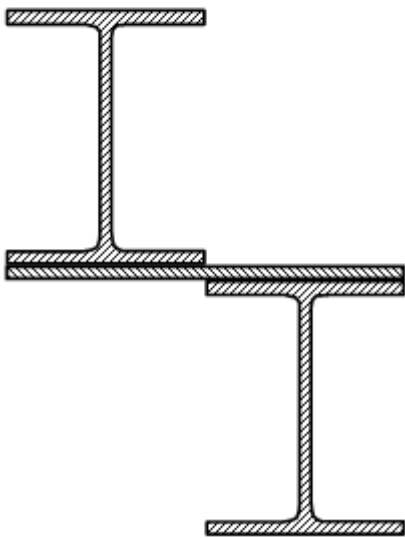
5



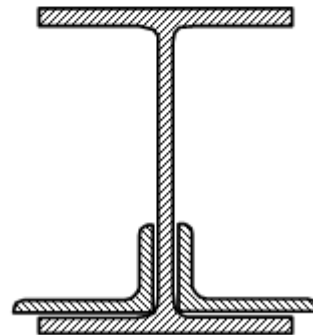
6



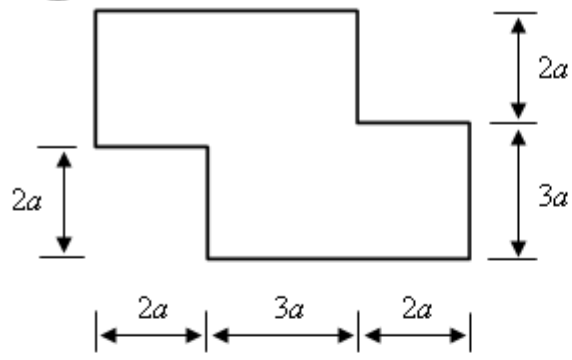
7



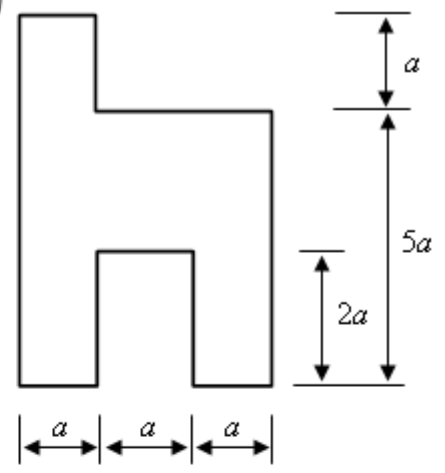
8



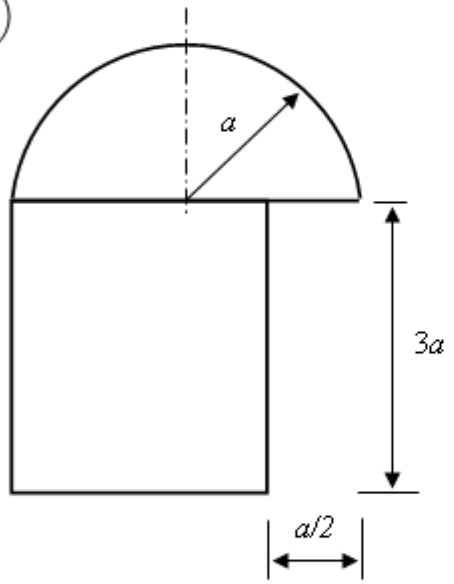
9



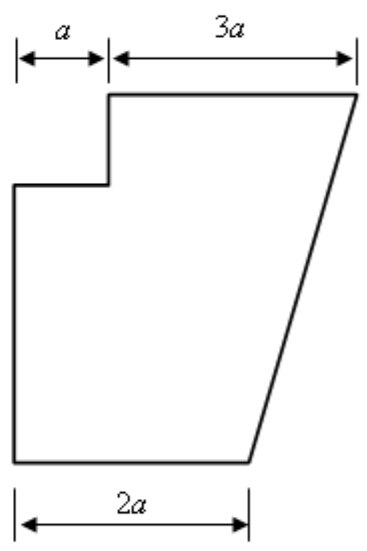
10



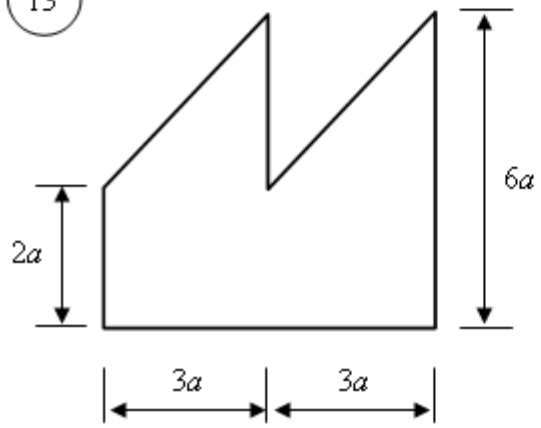
11



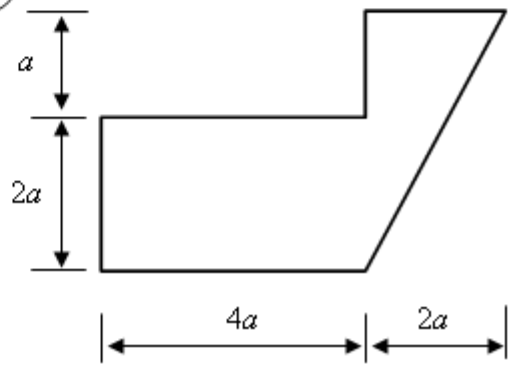
12



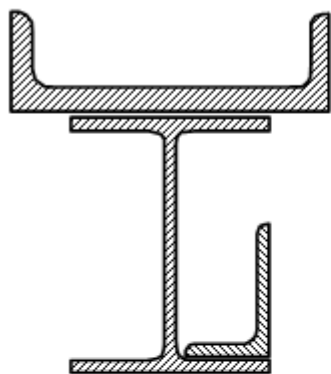
13



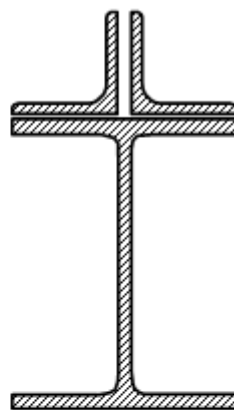
14



15



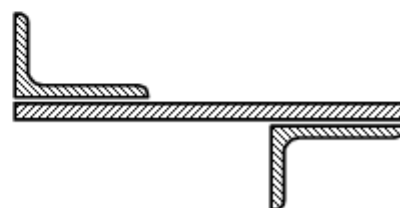
16



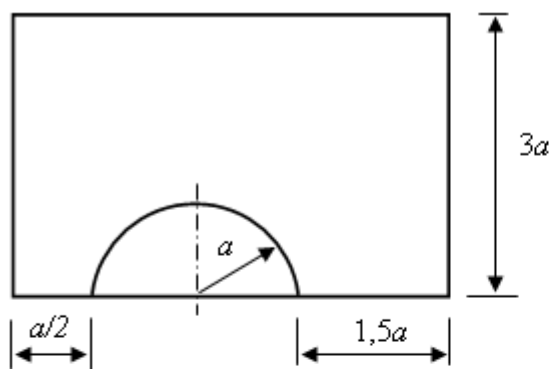
17



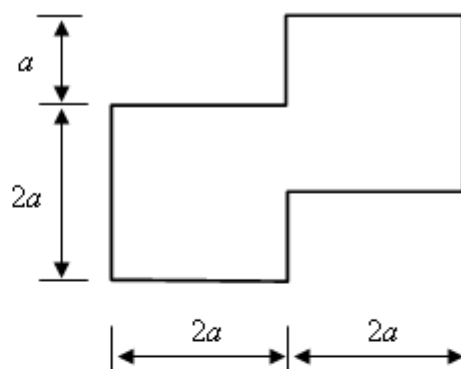
18



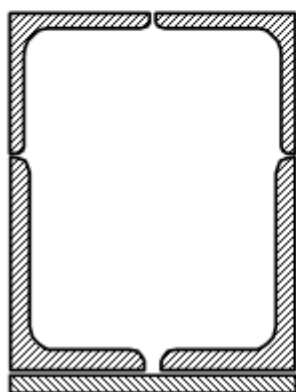
19



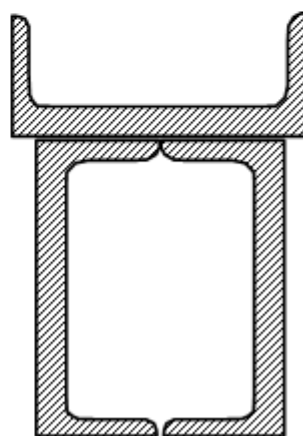
20



21



22



ГЛАВА 4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №2

на тему:

«Определение внутренних усилий в стержневых системах при изгибе»

Для девяти балок и плоских стержневых систем согласно варианту (собственный порядковый номер в списке группы) требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Вычислить значения изгибающих моментов, продольных и поперечных сил в характерных сечениях и построить эпюры этих внутренних усилий.
3. Для балок с горизонтальной осью подобрать сечения в виде стального прокатного двутавра по методу предельных состояний. При подборе сечений заданную нагрузку считать расчётной, а расчётное сопротивление материала принять $R = 210$ МПа.

Величины нагрузок и геометрических размеров балок и стержневых систем для каждого варианта приведены в таблице 2.

Номера схем согласно вариантам приведены в таблице 3.

Схемы балок и плоских стержневых систем приведены в таблице 4.

Таблица 2

№ ва- рианта	a , м	b , м	c , м	P_1 , кН	P_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	m , кН·м
1	3,0	2,0	1,0	26	20	20	12	30
2	2,0	2,1	1,2	30	20	20	10	40
3	3,0	2,2	2,0	40	30	30	20	40
4	2,4	1,6	1,0	30	20	20	10	20
5	2,0	2,6	1,4	32	24	15	20	36
6	2,6	3,0	1,2	36	32	18	25	25
7	2,4	2,8	1,0	24	30	20	18	40
8	3,0	2,4	1,4	30	24	18	20	32
9	3,0	2,8	1,6	35	35	25	25	40
10	3,2	3,0	1,6	40	30	30	16	42
11	3,4	2,8	1,8	42	36	18	18	48
12	2,8	3,0	2,0	45	40	20	20	51
13	3,0	2,0	1,0	26	20	20	12	30
14	2,0	2,1	1,2	30	20	20	10	40
15	3,0	2,2	2,0	40	30	30	20	40
16	2,4	1,6	1,0	30	20	20	10	20
17	2,0	2,6	1,4	32	24	15	20	36
18	2,6	3,0	1,2	36	32	18	25	25
19	2,4	2,8	1,0	24	30	20	18	40
20	3,0	2,4	1,4	30	24	18	20	32
21	3,0	2,8	1,6	35	35	25	25	40
22	3,2	3,0	1,6	40	30	30	16	42
23	3,4	2,8	1,8	42	36	18	18	48
24	2,8	3,0	2,0	45	40	20	20	51
25	3,0	2,0	1,0	26	20	20	12	30
26	2,0	2,1	1,2	30	20	20	10	40
27	3,0	2,2	2,0	40	30	30	20	40
28	2,4	1,6	1,0	30	20	20	10	20
29	2,0	2,6	1,4	32	24	15	20	36
30	2,6	3,0	1,2	36	32	18	25	25

Таблица 3

№ варианта	Номера схем	№ варианта	Номера схем
1	1, 9, 15, 21, 29, 37, 45, 51, 61	16	7, 14, 19, 24, 31, 38, 45, 59, 68
2	2, 10, 16, 22, 30, 38, 46, 52, 62	17	8, 9, 20, 25, 32, 39, 46, 51, 69
3	3, 11, 17, 23, 31, 39, 47, 53, 63	18	1, 10, 15, 26, 33, 47, 40, 52, 61
4	4, 12, 18, 24, 32, 40, 48, 54, 64	19	1, 11, 16, 27, 34, 41, 48, 60, 70
5	5, 13, 19, 25, 33, 41, 49, 55, 65	20	6, 9, 21, 19, 32, 44, 47, 57, 70
6	6, 14, 20, 26, 34, 42, 50, 56, 66	21	2, 14, 15, 25, 29, 40, 46, 60, 67
7	7, 9, 15, 27, 35, 43, 45, 57, 67	22	7, 10, 20, 21, 37, 33, 48, 58, 70
8	8, 10, 16, 28, 36, 44, 46, 58, 68	23	3, 9, 16, 26, 29, 40, 47, 54, 68
9	9, 11, 17, 21, 29, 37, 47, 59, 69	24	8, 11, 15, 22, 34, 37, 49, 59, 70
10	1, 11, 16, 27, 34, 41, 48, 53, 62	25	2, 14, 15, 25, 29, 40, 46, 60, 67
11	2, 9, 17, 28, 35, 42, 49, 54, 63	26	1, 12, 16, 35, 38, 23, 50, 51, 65
12	3, 10, 15, 21, 36, 43, 50, 55, 64	27	5, 11, 26, 18, 31, 43, 46, 56, 61
13	4, 11, 16, 21, 29, 44, 45, 56, 65	28	6, 12, 19, 27, 32, 44, 47, 57, 62
14	5, 12, 17, 22, 29, 37, 46, 57, 66	29	8, 11, 15, 22, 34, 37, 49, 59, 70
15	6, 13, 18, 23, 30, 37, 47, 58, 67	30	8, 14, 21, 29, 34, 46, 49, 59, 64

Таблица 4

№	схема	№	схема
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	
9		10	
11		12	

13		14	
15		16	
17		18	
19		20	
21		22	
23		24	
25		26	

27		28	
29		30	
31		32	
33		34	
35		36	
37		38	
39		40	
41		42	
43		44	

45		46	
47		48	
49		50	
51		52	
53		54	
55		56	
57		58	
59		60	

61		62	
63		64	
65		66	
67		68	
69		70	

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Андреев В.И. Техническая механика: учебник для подготовки бакалавров по направлению 270800 - "Строительство" / В.И.Андреев, А.Г.Паушкин, А.Н.Леонтьев. - [Изд. 2-е испр. и доп.]. - Москва: Изд-во АСВ, 2013. - 251 с.
2. Атаров Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / Н. М. Атаров [рец.: Н. Н. Атаров]. - Москва: ИНФРА-М, 2011. - 406 с.
3. Атаров Н.М. Сопротивление материалов: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270800 "Строительство" : [в 3 ч.] / Н.М.Атаров [и др.]; Московский государственный строительный университет; [рец.: С.Н.Кривошапко, Н.Н.Шапошников]. - Москва: МГСУ, 2012 - 2014. Ч. 3 / под общ. ред. Н. М. Атарова. - 2-е изд., испр. и доп. - 2014. - 73 с.
4. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник для вузов / Г.С.Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна, Н. М. Атарова. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: Инфра-М, 2013. - 637 с.
5. Ганджунцев М.И. Расчет статически определимых систем: практикум для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению 08.03.01 "Строительство" / Московский государственный строительный университет, Каф.строительной механики; [сост.: М.И.Ганджунцев, А.А.Петраков; рец.: В.Г.Богопольский]. - Москва: МГСУ, 2015. - 64 с.