Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной механики и математики

МАТЕМАТИКА

*Методические указания к выполнению практических работ
по дисциплине «Математика» для студентов бакалавриата очной формы обучения
направления подготовки 08.03.01 Строительство*

Москва 2019

УДК 517
ББК 22.161
М54
С о с т а в и т е л и: Г.Е. Полехина

М54 Математика [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов бакалавриата очной формы обучения направления подготовки 08.03.01 Строительство / М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т., каф. прикладной механики и математики; сост.: Г.Е. Полехина. — Электрон. дан. и прогр. (1,2 Мб). — Москва: НИУ МГСУ, 2019. — Учебное сетевое электронное издание — Режим доступа: http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS — Загл. с титул. экрана.

Даны теоретические сведения, которые необходимы для последующего решения задач, приводятся решения «типовых» задач, предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Для студентов бакалавриата очной формы обучения направления подготовки 08.03.01 Строительство.

Учебное сетевое электронное издание

Введение

Данные методические указания ставят своей целью оказать существенную помощь студенту в овладении техникой интегрирования.

Рекомендации состоят из 10 параграфов. В них излагаются методы решения типовых задач интегрального исчисления, приводятся подробные решения примеров и пояснения к этим решениям. В конце параграфа предлагаются упражнения для самостоятельной работы.

§ 1. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, то есть $F'(x)=f(x)$.

Теорема. Две различные первообразные одной и той же функции, определенной на промежутке, отличаются друг от друга в этом промежутке на постоянное слагаемое.

Доказательство. В самом деле, пусть $f(x)$- некоторая функция, определенная на промежутке $[a;b]$, и $F_1(x), F_2(x)$ – ее первообразные, т.е. $F_1'(x)=f(x), F_2'(x)=f(x)$. Отсюда $F_1'(x)=F_2'(x)$.

Но если две функции имеют одинаковые производные, то эти функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Следовательно,

$F_1(x)-F_2(x)=C,$ где C- постоянная величина, что и требовалось доказать.

Основное свойство первообразных: если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ имеют вид $F(x)+C$, где C – постоянная.

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных. Неопределенный интеграл функции $f(x)$ обозначается $\int f(x)dx$ и, исходя из определения $\int f(x)dx = F(x)+C$.

В этом равенстве $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, переменную x – переменной интегрирования, а слагаемое C – постоянной интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad (c = const).$$

Для доказательства данного равенства найдем производные от левой и правой частей:

$$(\int cf(x)dx)' = cf(x), (c\int f(x)dx)' = c(\int f(x)dx)' = cf(x).$$

Производные от правой и левой частей равны, следовательно разность двух любых функций, стоящих слева и справа, есть постоянная. В этом смысле и следует понимать данное равенство.

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$$

При вычислении неопределенных интегралов бывает полезно иметь в виду следующие правила.

1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

2. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C.$$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

§ 2. Таблица основных интегралов.

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C.$ $\quad (a \neq -1)$

2. $\int 0 \cdot dx = C.$

3. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$

4. $\int \dfrac{1}{x} \cdot dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$ $\quad (x \neq 0)$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

9. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C$.

14. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$.

16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

18. $\int \mathrm{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

19. $\int \mathrm{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

20. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

21. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

§ 3. Интегрирование разложением.

Метод разложения основан на свойстве 4 неопределенного интеграла.

Если $f(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)$,

то $\int f(x)dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$

Пример 1. Найти интеграл $\int x^3 dx$.

Решение. Применяя формулу 1 § 2 для случая $a=3$. В соответствии с этой формулой получаем

$$\int x^3dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{x^4}{4}+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\frac{x^4-2x^3+3x^2}{x^2}dx$.

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, пользуясь свойствами 3 и 4 и формулами 1, 3 § 2, находим

$$\int\frac{x^4-2x^3+3x^2}{x^2}dx=\int\left(x^2-2x+3\right)dx=\int x^2dx-2\int xdx+3\int dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+3x+C=\frac{x^3}{3}-x^2+3x+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2dx$.

Решение. Раскроем скобки $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2=1-2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$.

$$\int\left(1-2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int dx-2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^4}=\int dx-2\int x^{-2}dx+$$

$$+\int x^{-4}dx=x-2\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=x-2\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-3}}{-3}+C=x+2x^{-1}-$$

$$-\frac{x^{-3}}{3}+C=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\operatorname{ctg}^2xdx$.

Решение. $\operatorname{ctg}^2\mathrm{x}=\frac{\cos^2\mathrm{x}}{\sin^2\mathrm{x}}=\frac{1-\sin^2\mathrm{x}}{\sin^2\mathrm{x}}=\frac{1}{\sin^2\mathrm{x}}-\frac{\sin^2\mathrm{x}}{\sin^2\mathrm{x}}=\frac{1}{\sin^2\mathrm{x}}-1.$

$$\int\operatorname{ctg}^2xdx=\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2x\cdot\cos^2x}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\sin^2x\cdot\cos^2x}=\int\frac{1}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx=$

$$=\int\frac{\sin^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx+\int\frac{\cos^2}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}==\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

Задачи. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int\left(x^2+2x+\dfrac{1}{x}\right)dx$ 2. $\int\dfrac{x-2}{x^3}dx$

3. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ 4. $\int\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$

5. $\int e^x\cdot\left(1-\dfrac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$ 6. $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$

7. $\int\left(\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ 8. $\int\dfrac{x-2}{\sqrt{x^3}}dx$

9. $\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)dx$ 10. $\int\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2dx$

11. $\int\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$ 12. $\int\dfrac{10x^8+3}{x^4}dx$

13. $\int\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$ 14. $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$

15. $\int\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ 16. $\int a^x\cdot\left(1+\dfrac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$

17. $\int\dfrac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$ 18. $\int\dfrac{x^4}{1+x^2}dx$

19. $\int\dfrac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2}dx$ 20. $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x^3}}\right)dx$

§ 4. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента функции.

Рассмотрим простейшие преобразования дифференциала:

1. $dx=d(x+b)$, где b – постоянная величина.

2. $dx=\dfrac{1}{a}d(ax)$, где постоянная $a\neq 0$.

3. $dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)$, где постоянная $a\neq 0$.

4. $xdx=\dfrac{1}{2}d\left(x^2\right)$. 5. $xdx=\dfrac{1}{2}d\left(x^2+b\right)$.

6. $\sin x dx = -d(\cos x)$. 7. $\cos x dx = d(\sin x)$.

8. $e^x dx = d(e^x)$. 9. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(\mathrm{tg} x)$.

10. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = d(-\mathrm{ctg} x)$. 11. $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg} x)$.

12. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$. 13. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$.

14. $a^x dx = d\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)$.

В общем случае $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (2x+3)^2 dx$.

Решение. На основании преобразования 3 дифференциала имеем $dx = \frac{1}{2} d(2x+3)$.

$$\int (2x+3)^2 dx = \int (2x+3)^2 \cdot \frac{1}{2} d(2x+3) = \frac{1}{2} \int (2x+3)^2 d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2x+3)^3}{3} + C = \frac{1}{6} \cdot (2x+3)^3 + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \sqrt{x+4} dx$

Решение. Согласно преобразованию 1, $dx = d(x+4)$.

$$\int \sqrt{x+4} dx = \int (x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \int (x+4)^{\frac{1}{2}} d(x+4) = \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{x dx}{x^2+2}$.

Решение. Согласно преобразованию 5, $x dx = \frac{1}{2} d(x^2+2)$.

$$\int \frac{x dx}{x^2+2} = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int e^{\frac{x}{2}} dx$.

Решение. $\int e^{\frac{x}{2}}dx=\int e^{\frac{x}{2}}2d\left(\frac{x}{2}\right)=2\int e^{\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=2\cdot e^{\frac{x}{2}}+C$.

Пример 5. Найти интеграл $\int \cos\frac{x}{4}dx$.

Решение. $\int \cos\frac{x}{4}dx=\int \cos\frac{x}{4}4d\left(\frac{x}{4}\right)=4\int \cos\frac{x}{4}d\left(\frac{x}{4}\right)=4\sin\frac{x}{4}+C$.

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}=\int \frac{\frac{1}{3}d(3x)}{\sin^2 3x}=\frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x}=-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}3x+C$.

Пример 7. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx$.

Решение.

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2)=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C==\frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}{8}+C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int e^{x^3}x^2dx$.

Решение. $\int e^{x^3}x^2dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3)=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$.

Задачи. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \cos 3x dx$ 2. $\int e^{-3x}dx$

3. $\int \left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$ 4. $\int (3-2x)^4dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$

7. $\int \sqrt{4x-1}dx$ 8. $\int \sqrt[3]{5-6x}dx$

9. $\int \sin(a-bx)dx$ 10. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$

11. $\int \frac{dx}{1-10x}$ 12. $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$

13. $\int \sin^2 x\cdot\cos x dx$ 14. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$

15. $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}dx$ 16. $\int e^{\cos x}\cdot \sin xdx$

17. $\int e^{-x^2}\cdot xdx$ 18. $\int \sqrt{x^2+1}\cdot xdx$

19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ 20. $\int \sqrt{1+4\sin x}\cdot \cos xdx$

21. $\int \frac{\sin xdx}{1+3\cos x}$ 22. $\int \frac{dx}{x\cdot(1+\ln x)}$

23. $\int \cos^3 x\cdot \sin xdx$ 24. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$

25. $\int \sin x\cdot \cos xdx$ 26. $\int e^{x^3}\cdot x^2dx$

27. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 28. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

29. $\int \left(e^x+e^{-x}\right)^2 dx$ 30. $\int \frac{x^2dx}{1-x^3}$

§ 5.Интегрирование по частям.

Если u и v – дифференцируемые функции от x, то из формулы для дифференциала произведения двух функций

$d(uv)=udv+vdu$, откуда $udv=d(uv)-vdu.$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим: $\int udv=\int d(uv)-\int vdu,$ или

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (1)$$

Это и есть формула интегрирования по частям.

Укажем некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида

$\int P(x)e^{kx}dx;\ \int P(x)\cdot \sin kxdx;\ \int P(x)\cdot \cos kxdx,$

где $P(x)$ - многочлен, k - некоторое число.

За u принимают $P(x)$, т. е. $u=P(x)$

2. Интегралы вида

$\int P(x)\cdot \ln x dx$; $\int P(x)\cdot \arcsin x dx$; $\int P(x)\cdot \arccos x dx$; $\int P(x)\cdot \operatorname{arctg} x dx$; $\int P(x)\cdot \operatorname{arcctg} x dx$.

Во всех этих случаях за u принимают функцию, являющуюся множителем при $P(x)$.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot \cos bx dx$; $\int e^{ax}\cdot \sin bx dx$,

где a и $в$ – числа, находятся двукратным интегрированием по частям.

Пример 1. Найти $\int x\cdot \sin x dx$.

Решение. Обозначим: $u = x$; $dv = \sin x dx$

Для применения формулы (1) необходимо знать ещё du и v. Дифференцируя равенство $u = x$, получаем $dx = du$. Интегрируем $\int dv = \int \sin x dx$, $v = -\cos x$.

Подставляя значения u, v, du, dv в формулу (1), находим

$$\int x\cdot \sin x dx = x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cdot\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x\cdot\cos x + \sin x + C.$$

Пример 2. Найти $\int x\cdot \ln x dx$

Решение. Полагая $u = \ln x$, $dv = x dx$, получаем $du = \frac{1}{x}dx$; $v = \frac{x^2}{2}$.

По формуле (1) находим

$$\int x\cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{4}\cdot x^2 + C.$$

Пример 3. Найти $\int e^x\cdot \sin x dx$

Решение. Положим $u = e^x$, $dv = \sin x dx$, отсюда $du = e^x dx$, $v = -\cos x$. Тогда

$$\int e^x\cdot\sin x dx = -e^x\cdot\cos x - \int(-\cos x)\cdot e^x dx = -e^x\cdot\cos x + \;+\int\cos x\cdot e^x dx. \qquad (2)$$

К интегралу в правой части снова применяем формулу интегрирования по частям.

Положим $u = e^x$, $dv = \cos x dx$, отсюда $du = e^x dx$, $v = \sin x$. Тогда $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx.$

Подставляем найденное выражение в равенство (2), получаем

$$\int e^x \cdot \sin x dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx;$$

$$\int e^x \cdot \sin x dx + \int e^x \cdot \sin x dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x$$

$$2\int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x$$

следовательно, $\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x\right) + C.$

Задачи. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \ln x dx.$ 2. $\int x \cdot e^{2x} dx.$

3. $\int x^2 \cdot \cos x dx.$ 4. $\int x \cdot \ln(x-1) dx.$

5. $\int x \cdot \mathrm{arctg} x dx.$ 6. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}.$

7. $\int \arcsin x dx.$ 8. $\int \ln(x^2+1) dx.$

9. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$ 10. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}.$

11. $\int x^3 \cdot e^{-x} dx.$ 12. $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx.$

13. $\int \mathrm{arctg} x dx.$ 14. $\int e^x \cdot \cos x dx.$

§6.Интегрирование методом замены переменной.

Пункт 1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx,$ где $f(x)$ - непрерывная функция. Введем вместо x новую переменную z, положив $x = \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(z)$, причем такая, для которой существует обратная функция $z = \psi(x)$. Тогда для вычисления $\int f(x)dx$ достаточно вычислить $\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$ и затем переменную z,заменить через $\psi(x)$. Справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz; \qquad z = \psi(x). \qquad (1)$$

Функцию $\varphi(z)$ выбирают так, чтобы новая подынтегральная функция была «более простой» для интегрирования.

Пример 1. Найти $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Полагая $x = z^2$, находим $dx = 2zdz$.

Тогда по формуле (1)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^z}{z}\cdot 2zdz = 2\int e^z dz = 2e^z + C = 2\cdot e^{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int x\cdot\sqrt{x-2}dx$.

Решение. Чтобы избавиться от корня, положим $\sqrt{x-2} = t$. Возводя в квадрат это равенство, найдем *x*:

$x - 2 = t^2$, $x = t^2 + 2$, откуда $dx = 2tdt$.

Подставляя полученные равенства в подынтегральное выражение, находим

$$\int x\cdot\sqrt{x-2}dx = \int (t^2+2)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^2+2)\cdot t^2 dt = 2\int (t^4+2t^2)dt =$$

$$= 2\int t^4 dt + 4\int t^2 dt = 2\frac{t^5}{5} + 4\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-2}\right)^5 + \frac{4}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + C$$

Пункт 2. При интегрировании иррациональных функций используют замену переменных, которые позволяют свести интегрирование иррациональных функций к интегрированию рациональных функций. Так, для нахождения интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{x},...,\sqrt[k]{x}\right)dx$,

где *R* – рациональная функция относительно *x* и различных дробных степеней *x,* используется замена переменной вида $x = t^p$ (в качестве *p* берется наименьший общий знаменатель всех показателей степени *x*).

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

Решение. Применяем подстановку $x = t^6$, то $dx = 6t^5dt$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt[3]{x^2} = t^4$.

Следовательно,

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx = \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6\left(1+t^2\right)}6t^5dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3\left(t^2+1\right)+1}{1+t^2}dt = 6\int t^3dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6\frac{t^4}{4} + 6\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{3}{2}t^4 + 6\operatorname{arctg} t + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Пункт 3. Интеграл от простейшей квадратичной иррациональности $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью дополнения квадратного трехчлена ax^2+bx+c до полного квадрата сводится к одному из двух интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Решение.

$$x^2-6x+13 = x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+13 = x^2-2\cdot x\cdot 3+9-9+13 =$$
$$= (x-3)^2-9+13 = (x-3)^2+4.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right| + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

Решение.

$$1-x-x^2 = -\left(x^2+x\right)+1 = -\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+1 = -\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\frac{1}{4}+1 = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} = \frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

Пункт 4.

1). Интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

вычисляется с помощью следующих преобразований

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + (B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Применив к первому из полученных интегралов подстановку $ax^2+bx+c=t, (2ax+b)dx=dt,$ получим

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

Второй же интеграл был рассмотрен в пункте 3.

2). Интеграл $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ заменой переменной

$t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'$ приводится к интегралу вида $\int \frac{Dt+E}{\sqrt{mt^2+n}}dt.$

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx.$

Решение.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx -$$

$$-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx.$

Решение.

$$t=\frac{1}{2}(6-2x-x^2)' = \frac{1}{2}(-2-2x) = -1-x; \quad x=-1-t, dx=-dt.$$

$$6-2x-x^2 = 6-2(-1-t)-(-1-t)^2 = 6+2+2t-1-2t-t^2 = 7-t^2.$$

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx = -\int \frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}}dt = \int \frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{7-t^2}} -$$

$$-4\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(7-t^2)}{\sqrt{7-t^2}} - 4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7-t^2} -$$

$$-4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=-\sqrt{6-2x-x^2}+4\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{7}}+C.$$

Пункт 5.

Рассмотрим интегралы

1) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$;

2) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx;$

3) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx.$

Эти интегралы находятся с помощью следующих подстановок:

$x=a\cdot\sin t$ для интеграла 1) типа,

$x=a\cdot\mathrm{tg}t$ для интеграла 2) типа

$x=\dfrac{a}{\cos t}$ для интеграла 3) типа.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$$

Решение. Вычислим интеграл с помощью подстановки

$x=2\sin t$, $dx=2\cos t dt$, $t=\arcsin\dfrac{x}{2}$

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos t dt=\int\mathrm{ctg}^2 t dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=$$

$$=-\mathrm{ctg}t-t+C=-\mathrm{ctg}(\arcsin\frac{x}{2})-\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

Пункт 6.

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Этот интеграл с помощью подстановки $x-\alpha=\dfrac{1}{z}$ приводится к интегралу рассмотренному в пункте 3.

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+1}}$.

Решение. $x=\dfrac{1}{z}, dx=-\dfrac{1}{z^2}dz$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+1}} = \int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z}+1}} = -\int \frac{\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^2}\sqrt{z^2-4z+1}} =$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-4z+1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{(z-2)^2-3}} = -\ln\left|z-2+\sqrt{z^2-4z+1}\right| +$$

$$+C = -\ln\left|\frac{1}{x}-2+\sqrt{\frac{1}{x^2}-4\frac{1}{x}+1}\right| + C.$$

Пункт 7.

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ и $\int \sqrt{x^2+m}dx$

Рассмотрим второй интеграл

$$\int \sqrt{x^2+m}dx = \int \frac{x^2+m}{\sqrt{x^2+m}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}} + \int \frac{mdx}{\sqrt{x^2+m}} =$$

$$u = x, du = dx, dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+m}}, v = \sqrt{x^2+m}$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}dx + m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}dx + m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|$$

$$2\int \sqrt{x^2+m}dx = x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2+m}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|) + C.$$

Задачи. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$
3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$
4. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$
5. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$
6. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$
8. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

12. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$

18. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$

19. $\int x\sqrt{x^2-1}dx.$

§ 7. Интегрирование рациональных дробей.

Пункт 1. Рассмотрим интеграл $\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx,$ где $P(x)$ - целый многочлен и *а, в, с* – постоянные $a \neq 0$. Если дробь неправильная, то делим $P(x)$ на ax^2+bx+c, получаем в частном некоторый многочлен $a(x)$ и в остатке – линейный двучлен $mx+n$, отсюда $\frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = a(x) + \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2x^2+3}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x\sqrt{2}\right)}{\left(x\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-5}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-10x+16}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x^2-10x+16}=\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot 5x+25\right)+\left(16-25\right)}=\int\frac{d\left(x-5\right)}{\left(x-5\right)^2-3^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{\left(x-5\right)-3}{\left(x-5\right)+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right|+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{xdx}{x^2+x+1}$.

Решение.

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\int\frac{xdx}{x^2+x+1}=\int\frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Полагаем $x+\frac{1}{2}=t$, отсюда $x=t-\frac{1}{2}$ и $dx=dt$.

Следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{x^4dx}{x^2+1}$.

Решение. Произведя деление x^4 на x^2+1, имеем $\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$,

отсюда $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int x^2dx-\int dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C.$

Замечание. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные и различные корни x_1 и x_2, то для вычисления интеграла можно воспользоваться разложением подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2},\qquad (1)$$

где A и B – неопределенные коэффициенты. Числа A и B находятся путем приведения равенства (1) к целому виду и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства.

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx.$

Решение. Приравнивая знаменатель к нулю, получаем уравнение $x^2+5x-6=0$; находим его корни: $x_1=1$ и $x_2=-6$.

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}=\frac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$

Отсюда, освобождаясь от знаменателя и учитывая, что $x^2+5x-6=(x-1)\cdot(x+6)$, получим $x+2=A(x+6)+B(x-1)$, или $x+2=(A+B)x+(6A-B)$.

Приравнивая друг к другу коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и в левой частях последнего равенства, будем иметь $\begin{cases} A+B=1 \\ 6A-B=2 \end{cases}$.

Следовательно, $A=\frac{3}{7}$, $B=\frac{4}{7}$.

Получаем $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx=\frac{3}{7}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{4}{7}\int \frac{dx}{x+6}=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C.$

Задачи. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x^2-25}$
2. $\int \frac{dx}{x^2+9}$
3. $\int \frac{dx}{x^2+3}$
4. $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx$
5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$
6. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$
7. $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$
8. $\int \frac{x^4dx}{x^2-3}$
9. $\int \frac{x^2dx}{x^2-2}$
10. $\int \frac{x^3}{x-2}dx$
11. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$
12. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$

13. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$ 14. $\int \frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx$

15. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$

Если знаменатель правильной дроби разлагается на множители вида $(x-a)^{\alpha}$ и $(x^2+px+q)^{\beta}$, то правильная дробь разлагается на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}\cdot(x^2+px+q)^{\beta}}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_{\beta}x+N_{\beta}}{(x^2+px+q)^{\beta}}.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$.

Решение. $\frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$.

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю, получаем $\frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Сравниваем числители $9-5x=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$.

Раскрывая скобки в правой части и группируя члены, находим $9-5x=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)\cdot x+(6A+3B+2C)$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получим три уравнения для определения неизвестных коэффициентов A, B, C: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=5 \\ 6A+3B+2C=9 \end{cases}$

Решая эту систему, находим: $A=2$, $B=1$, $C=-3$. Следовательно, $\frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}$

И поэтому

$$\int \frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}\right)dx=$$

$$= 2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x-3} = 2\ln|x-1|+\ln|x-2|-3\ln|x-3|+C.$$

Пункт 2.

Рекуррентная формула

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right)$$

$(k \geq 2)$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Решение. $$\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\int\frac{dx}{x^2+4}+\frac{x}{2(2-1)(x^2+4)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{2(x^2+4)}\right)+C=\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}+C.$$

Задачи. Найти интегралы:

1. $\int\frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx$ 2. $\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$

3. $\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$ 4. $\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

5. $\int\frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$ 6. $\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+15x}dx$

7. $\int\frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$ 8. $\int\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx$

9. $\int\frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$ 10. $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx.$

§ 8. Интегрирование тригонометрических функций.

1. Интегралы вида $\int\sin ax\cdot\cos bx dx$, $\int\sin ax\cdot\sin bx dx$, $\int\cos ax\cdot\cos bx dx$ находятся с помощью тригонометрических формул:

$$\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)];$$

$$\cos a\cdot\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right];$$

$$\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right].$$

Пример.

$$\int\sin 5x\cdot\sin 3x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C.$$

2. Интегралы вида

$$J_{n,m}=\int\sin^n x\cdot\cos^m x dx,$$

где n и m - четные числа, находятся с помощью формул:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел m или n - нечетное, то интеграл находим непосредственно, отделяя от нечетной степени один множитель и вводя новую переменную. В частности, если $m=2k+1$, то $J_{n,m}=\int\sin^n x\cdot\cos^{2k+1} x dx==\int\sin^n x\cdot\cos^{2k} x\cos x dx=\int\sin^n x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)^k d(\sin x).$

Пример.

$$\int\sin^3 x\cdot\cos^{\frac{1}{2}} x dx=\int\sin^2 x\cdot\sin x\cdot\cos^{\frac{1}{2}} x dx=$$

$$=-\int(1-\cos^2 x)\cos^{\frac{1}{2}} x d(\cos x)=-\int\cos^{\frac{1}{2}} x d(\cos x)+$$

$$+\int\cos^{\frac{5}{2}} x d(\cos x)=-\frac{2\cos^{\frac{3}{2}} x}{3}+\frac{2\cos^{\frac{7}{2}} x}{7}+C.$$

3. Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, при этом $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Доказательство.

Имеем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\ \text{т.е.}\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Далее, $\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2\frac{x}{2}(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}) = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$, т.е. $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Наконец, из равенства $x = 2\mathrm{arctg}t$ имеем: $dt = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подынтегральная функция рациональна относительно t.

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Решение. Полагаем $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)(3+5\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int\frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $\cos x = t$.

Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $\sin x = t$.

Пример 2.

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx = \int\frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{\sin^6 x}dx = \int\frac{(1-\sin^2 x)d(\sin x)}{\sin^6 x} =$$

$$= \int\sin^{-6}x d(\sin x) - \int\sin^{-4}x d(\sin x) = \frac{\sin^{-5}x}{-5} - \frac{\sin^{-3}x}{-3} + C =$$

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C.$$

Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то целесообразно применить подстановку $\mathrm{tg}x = t$, при этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \ x = \mathrm{arctg}\, t, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx = \int R(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2})\frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{3}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}x}{2} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$.

Решение. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx =$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right) \cdot \cos^2 x \cdot \left(\sin x dx\right) = -\int \left(\cos^2 x - \cos^4 x\right) d\left(\cos x\right) =$$

$$= -\int \cos^2 x d\left(\cos x\right) + \int \cos^4 x d\left(\cos x\right) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \sin x \cdot \sin 5x dx$.

Решение. $\int \sin x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 4x - \cos 6x\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 4x dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x d\left(4x\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\int \cos 6x d\left(6x\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

Задачи. Найти интегралы:

1. $\int \sin^2 3x dx$.
2. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.
3. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.
4. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.
5. $\int \left(1+2\cos x\right)^2 dx$.
6. $\int \sin^5 x dx$.
7. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.
8. $\int \sin 3x \cdot \sin x dx$.
9. $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$.
10. $\int \sin 2x \cdot \cos 4x dx$.
11. $\int \cos^2 2x dx$.
12. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$.

§ 9. Вычисление определенных интегралов.

1. Теорема Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{где}$$

$x = \varphi(t), a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), t -$ новая переменная, $\alpha, \beta -$ новые пределы интегрирования.

3. Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$

Решение. $\int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2}{5}\int_4^9 xdx + \frac{1}{2}\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_4^9 + \sqrt{x}\Big|_4^9 =$

$= \frac{81}{5} - \frac{16}{5} + 3 - 2 = 14.$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx.$

Решение. Введем новую переменную по формуле $\sqrt{x+4} = t.$ Определим x и $dx.$ Возведем в квадрат обе части равенства $\sqrt{x+4} = t,$ получим $x + 4 = t^2$, откуда $x = t^2 - 4$ и $dx = 2tdt.$ Находим новые пределы интегрирования. Подставляя старые пределы в формулу $\sqrt{x+4} = t,$ получаем: $\sqrt{0+4} = t, t = 2$ и $\sqrt{5+4} = t, t = 3.$ Таким образом,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx = \int_2^3 (t^2 - 4)t2tdt = 2\int_2^3 (t^4 - 4t^2)dt = \frac{2}{5}t^5\Big|_2^3 -$$

$$-\frac{8}{3}t^3\Big|_2^3 = \frac{2}{5}(243 - 32) - \frac{8}{3}(27 - 8) = \frac{2}{5}\cdot 211 - \frac{8}{3}\cdot 19 = \frac{506}{15} = 33\frac{11}{15}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx.$

Решение. Положим $\sqrt{x}=t,$тогда $x=t^2,$и $dx=2tdt.$

Подставляя старые пределы интегрирования в формулу $\sqrt{x}=t,$получаем $\alpha=0,\beta=2.$ Следовательно,

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\int_0^2 \frac{2tdt}{t+1}=2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$=2\left(t\Big|_0^2-\ln|t+1|\Big|_0^2\right)=2(2-\ln 3)=4-2\ln 3.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_1^e \ln xdx.$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u=\ln x, dv=dx,$ определяем $du=\frac{1}{x}dx, v=x.$ Следовательно,

$$\int_1^e \ln xdx=x\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx=e\cdot\ln e-1\cdot\ln 1-x\Big|_1^e=e-e+1=1.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^\pi x\sin xdx.$

Решение. Применим формулу интегрирования

по частям. Полагая $u=x, dv=\sin xdx,$ определяем

$du=dx, v=-\cos x.$ Следовательно,

$$\int_0^\pi x\sin xdx=x(-\cos x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx=-\pi\cdot\cos\pi+\sin x\Big|_0^\pi=$$
$$=-\pi\cdot(-1)+\sin\pi-\sin 0=\pi.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

Решение. Введем новую переменную $x=2\sin t$.

Определим $dx=2\cos tdt$. Найдем новые пределы интегрирования $\sin t=\frac{x}{2}.$

При $x=0, \sin t=0, t=0.$

При $x=2, \sin t=1, t=\frac{\pi}{2}.$

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt == 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt = 2\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Задачи.

Вычислить интегралы:

1. $\int_2^4 (x^3 + x)dx.$

2. $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}.$

3. $\int_1^6 \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}.$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$

5. $\int_4^9 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

6. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}.$

7. $\int_{\pi}^{0} x\cdot\cos x dx.$

8. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

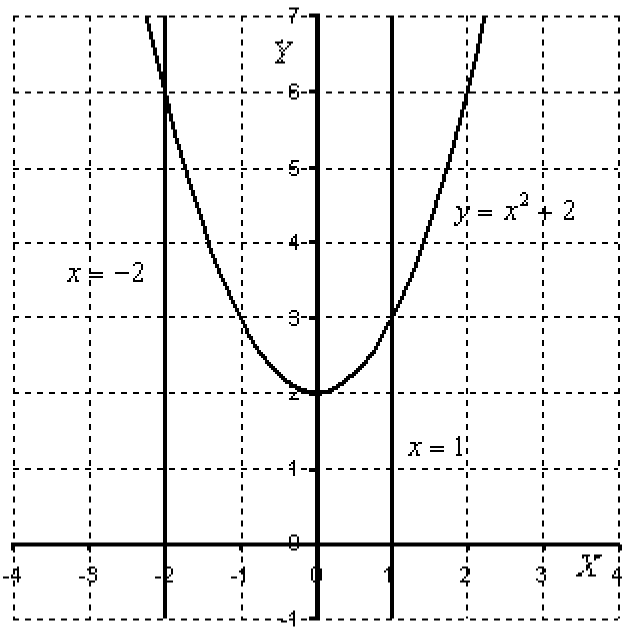
§ 10. Площадь криволинейной трапеции.

Площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx.$

С точки зрения геометрии определенный интеграл – это ПЛОЩАДЬ**.** То есть, определенному интегралу (если он существует) геометрически соответствует площадь некоторой фигуры.

Пример 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2, y = 0, x = -2, x = 1.$ Первый и важнейший момент решения – построение чертежа.



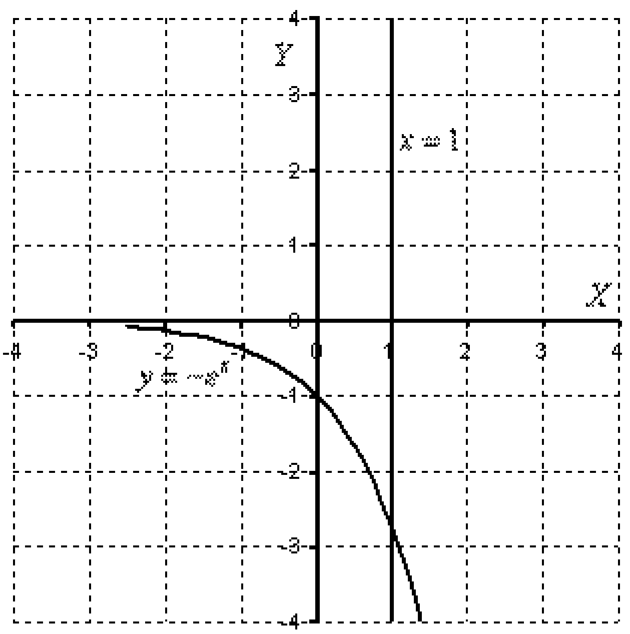
$$S = \int_{-2}^{1}\left(x^2+2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}+2-\left(-\frac{8}{3}-4\right) = \frac{1}{3}+2+\frac{8}{3}+4 = 9.$$

Ответ: 9

Пример 2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-e^x, x=1$ и координатными осями.

Решение**:** Выполним чертеж:



Если криволинейная трапеция расположена под осью OX (или, по крайней мере, не выше данной оси), то её площадь можно найти по формуле: $S=-\int_a^b f(x)dx.$

В данном случае: $S=-\int_0^1 \left(-e^x\right)dx = e^x\Big|_0^1 = e-1$

Ответ: $e-1$

Внимание! Не следует путать два типа задач:

1) Если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным.

2) Если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна! Именно поэтому в только что рассмотренной формуле фигурирует минус.

На практике чаще всего фигура расположена и в верхней и в нижней полуплоскости.

Пример 3.

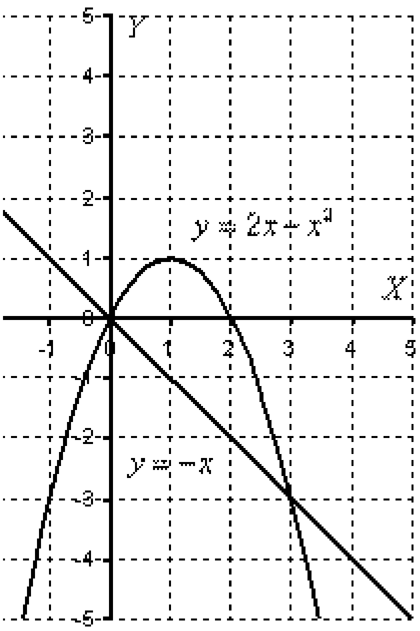
Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2, y=-x.$

Решение**:** Сначала нужно выполнить чертеж. Вообще говоря, при построении чертежа в задачах на площадь нас больше всего интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы $y=2x-x^2$ и прямой $y=-x..$ Это можно сделать двумя способами. Первый способ – аналитический. Решаем уравнение:

$$2x-x^2=-x$$
$$3x-x^2=0$$
$$x(3-x)=0$$
$$x_1=0, x_2=3.$$

Гораздо выгоднее и быстрее построить линии поточечно, при этом пределы интегрирования выясняются как бы «сами собой». Тем не менее, аналитический способ нахождения пределов все-таки приходится иногда применять, если, например, график достаточно большой, или поточенное построение не выявило пределов интегрирования (они могут быть дробными или иррациональными).

Возвращаемся к нашей задаче: рациональнее сначала построить прямую и только потом параболу. Выполним чертеж:



А теперь рабочая формула: Если на отрезке $[a,b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ больше либо равна некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми $x=a$, $x=b$, можно найти по формуле: $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$.

$$S=\int_0^3 (2x-x^2-(-x))dx=\int_0^3 (3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=$$
$$=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{27}{2}-9=\frac{9}{2}.$$

Ответ: 4,5.

Задачи. Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

1. $y = 4 - x^2, y = 0.$

2. $y = \ln x, x = e, y = 0.$

3. $y = x^2, y = 1.$

4. $y = \cos^2 x - \sin^2 x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$

5. $y = x^2, y = \sqrt{x}.$

Библиографический список.

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. - Изд. 16-е, стер.- СПб. ; М.; Краснодар : Лань,2010.-736 с.
2. Кудрявцев, Л.Д. Кур математического анализа [Текст]: учебник для бакалавров / Л.Д. Кудрявцев; Московский физико-технический институт. - 6-е изд. - Москва: Юрайт, 2012. - (Бакалавр. Базовый курс) Т.1. - 703 с.
3. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа Бермана [Текст]: учебное пособие. - Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2011.-607 с.

Отв. за выпуск — кафедра прикладной механики и математики

Подписано к использованию .2019 г. Уч.-изд. л. Объем данных 1,2 Мб
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ).
129337, Москва, Ярославское ш., 26.
Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75,
(499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru