Министерство образования и науки Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной механики и математики

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Методические указания к выполнению практических работ
по дисциплине «Математика 1» для студентов
бакалавриата очной формы обучения
направления подготовки 08.03.01 Строительство*

Москва 2015

УДК 51
ББК 22.16
О-30

С о с т а в и т е л ь
Г.Е. Полехина

О–30 **Обыкновенные** дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Математика 1» для студентов бакалавриата очной формы обучения направления подготовки 08.03.01 Строительство / М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т, каф. прикладной механики и математики ; сост. Г.Е. Полехина. — Электрон. дан. и прогр. (1,38 Мб). — Москва: НИУ МГСУ, 2015. — Учебное сетевое электронное издание — Режим доступа: http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS—Загл. с титул.экрана.

Представлены теоретические сведения, образцы решения многих типовых задач и варианты к типовому расчету по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Для студентов бакалавриата очной формы обучения направления подготовки 08.03.01 Строительство.

Учебное сетевое электронное издание

Отв. за выпуск —кафедра прикладной механики и математики

Подписано к использованию 15.10..2015 г. Уч.-изд. л. 1,7. Объем данных 1,38 Мб

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Московский государственный
строительный университет» (НИУ МГСУ).
129337, Москва, Ярославское ш., 26.
Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Введение.

Методические указания и варианты к типовому расчету по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения» предназначены для студентов, обучающихся по направлению 08.03.01. «Строительство», профилю подготовки «Промышленное и гражданское строительство».

Цель данного типового расчета – развитие и закрепление навыков решения задач.

Указания состоят из 9 параграфов. Приводятся краткие теоретические сведения и образцы решения многих типовых задач.

§1. Основные понятия и определения.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную *x*, искомую функцию $y = y(x)$ и производные этой функции, т.е. уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 .$$

Если искомая функция $y = y(x)$ есть функция одной переменной *x*, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например:

1. $x^3 y' - 3xy^2 = 2y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.
2. $y'' - xy' = x^3$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x; y)$. Решением дифференциального уравнения на интервале $(a; b)$ называется функция $y=\varphi(x)$, определенная на интервале $(a;b)$ вместе со своими производными, и такая, что подстановка функции $y=\varphi(x)$ в дифференциальное уравнение превращает последнее в тождество по x на $(a;b)$.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения $y'=f(x;y)$ в области D называется функция $y=\varphi(x,C)$, обладающая следующими свойствами:

а) эта функция является решением дифференциального уравнения при любом значении произвольной постоянной C, принадлежащей некоторому множеству;

б) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0,y_0)\in D$, существует единственное $C=C_0$, при котором решение удовлетворяет заданному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения $y'=f(x;y)$ называется такое решение $y=\varphi(x_0,C)$, которое получается из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при некотором частном значении произвольной постоянной C.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x;y)$ состоит в том, чтобы найти решение, которое при заданном значении аргумента $x=x_0$ принимает заданное значение $y=y_0$, т.е. удовлетворяет начальному условию $y(x_0)=y_0$. Другими словами, задача Коши состоит в нахождении частного решения.

Геометрически задача Коши формулируется следующим образом: среди всех интегральных кривых данного дифференциального уравнения выделить ту, которая проходит через заданную точку $(x_0;y_0)$.

§2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

1. Дифференциальное уравнение вида

$$f(x)dx = g(y)dy \qquad (1)$$

называется уравнением с разделёнными переменными. После интегрирования уравнения (1) его общее решение получается в неявном виде:

$$F(x) = G(y) + C,$$

где *F(x)* и *G(y)* – первообразные соответственно для функций *f(x)* и *g(y)*, *C*-произвольная постоянная.

2. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x) \cdot g_1(y)dx + f_2(x) \cdot g_2(y)dy = 0 \qquad (2)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Делим на $f_2(x) \cdot g_1(y)$ ($f_2(x) \neq 0$, $g_1(y) \neq 0$) уравнение (2). Получаем

$$\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = 0$$

$$\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = -\frac{g_2(y)dy}{g_1(y)}$$

Интегрируем обе части равенства

$$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = -\int \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения.

$$y' = \frac{y}{x}$$

Решение.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Отсюда имеем $dy = \frac{y}{x}dx$

Предположим, что $y \neq 0$. Разделим на y.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя, будем иметь

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \text{,или}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

Потенцируя последнее равенство, окончательно получим

y=cx

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение.

$$(1 + x^2)dy - 2xydx = 0$$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию: y=1 при x=0

Решение: Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $y(1+x^2)$, получим уравнение

$$\frac{dy}{y}-\frac{2xdx}{1+x^2}=0$$

Интегрируем.

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{2xdx}{1+x^2}=0$$

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{d(x^2+1)}{1+x^2}=0$$

$$\ln|y|-\ln(1+x^2)=\ln|c|$$

или $\ln\frac{|y|}{1+x^2}=\ln|c|$.

Откуда получаем общее решение

$$y=c(1+x^2).$$

Чтобы найти искомое частное решение, достаточно определить значение произвольной постоянной по начальным условиям.

1=c(1+0), c=1.

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y=1+x^2.$$

Задачи. Найти частное решение.

1. $y'=4x^3$; y=0 при x=0
2. $(x^2+4)y'-2xy=0$; y=5 при x=1
3. $xy'=\frac{y}{\ln x}$; y=1 при x=e
4. $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; y=1 при x=0
5. $y'=y^2$; y=1 при x=-1

6. $y' \cdot tg\, x - y = 1$; y=1 при $x = \dfrac{\pi}{2}$

Проинтегрировать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

7. $(x+3)dy - (y+3)dx = 0$

8. $y' = \dfrac{4}{x^2 - 4}$

9. $(xy^2 + x)dx + (y + x^2 y)dy = 0$

10. $y' = y^2 \cos x$

11. $\sin x\, dx + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$

12. $dr - r\, ctg\, \varphi\, d\varphi = 0$

§3. Однородные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

называется однородным уравнением. Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$u = \frac{y}{x} \quad (2) \quad \Rightarrow \quad y = u \cdot x \quad , \; y' = u'x + ux' = u'x + u \, , \qquad (3)$$

где u – новая неизвестная функция от x, u' - ее производная по x.

Подставляем (2) и (3) в (1)

$$u'x + u = f(u)$$

$$u'x = f(u) - u$$

т.к. $u' = \dfrac{du}{dx}$, то

$$x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$x \cdot du = (f(u) - u) \cdot dx$$

Делим на $x \neq 0$

$$du = \frac{(f(u) - u) \cdot dx}{x}$$

Делим на $f(u) - u \neq 0$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C\,.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения.

$$xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$$

Решение.

Разделим данное уравнение относительно производной y':

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\frac{y}{x}}$$

Правая часть уравнения зависит от отношения $\frac{y}{x}$, следовательно, данное уравнение является однородным.

Введем новую функцию t; $t = \frac{y}{x}$. Тогда y=t·x, $y' = t'x + t$.

Подставляем полученное выражение в уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$t'x + t = t - \frac{1}{\cos t}$$

или $t'x = -\frac{1}{\cos t}$.

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{dt}{dx}x = -\frac{1}{\cos t},$$

$$\cos t\,dt = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \cos t\,dt = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\sin t + \ln|x| = C.$$

Подставив вместо t его значение, получим общий интеграл.

$$\sin\frac{y}{x} + \ln|x| = C.$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение.

$$(x + y)dx + xdy = 0$$

Решение. Решим уравнение относительно производной y'.

$$\frac{x+y}{x}+y'=0$$

$$y'=-\frac{x+y}{x}$$

$$y'=-1-\frac{y}{x}$$

Правая часть уравнения зависит от отношения $\frac{y}{x}$, следовательно, данное уравнение является однородным.

Введем новую функцию t; $t=\frac{y}{x}$. Тогда y=tx, $y'=t'x+t$. Подставляем полученное выражение в уравнение.

$$t'x+t=-1-t$$

$$t'x=-1-2t$$

$$\frac{dt}{dx}x=-1-2t\,,$$

$$\frac{dt}{2t+1}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dt}{2t+1}=-\int\frac{dx}{x}\,,$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(2t+1)}{2t+1}=-\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{d(2t+1)}{2t+1}=-2\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|2t+1|=-2\ln|x|+\ln C\,,$$

$$\ln|2t+1|=\ln\frac{1}{x^2}+\ln C\,,$$

$$2t+1=\frac{C}{x^2}\,,$$

$$2\frac{y}{x}+1=\frac{C}{x^2}\text{, и, следовательно,}$$

$$2\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2}-1$$

$$2y=\frac{C}{x}-x$$

$$y=\frac{C}{2x}-\frac{x}{2}.$$

Задачи. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$
2. $(x-y)dy-y\,dx=0$
3. $xy'=y+xe^{\frac{y}{x}}$
4. $y'=\frac{x^2+y^2}{xy}$
5. $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$
6. $xy'+\sqrt{x^2+y^2}=y$
7. $xy'-y=x\cos\frac{y}{x}$
8. $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$.

§4. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнение Бернулли.

1) Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производную в первой степени:

$$y'+p(x)y=f(x) \qquad (1)$$

2) Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x)\cdot y^{\alpha}, \quad \alpha \in R \qquad (2)$$

(при $\alpha = 0$ это уравнение является линейным, при $\alpha = 1$ - уравнением с разделяющимися переменными). В (1) и (2) $p(x)$ и $f(x)$ - заданные функции.

Оба типа уравнений можно решать методом Бернулли с помощью подстановки

$y = u\cdot v, \quad y' = u'v + uv'$, где u и v – новые неизвестные функции от x, u' и v' - их производные по x.

Рассмотрим решение линейного уравнения. Подстановка выражений для y и y' в уравнение (1) приводит его к виду

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

В качестве v выбираем одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$v' + p(x)v = 0, \qquad (3)$$

тогда функция u определяется из уравнения

$$u'v = f(x) \qquad (4)$$

Уравнения (3), (4) – уравнения с разделяющимися переменными.

Рассмотрим решение уравнения (3).

$$v' + p(x)v = 0, \qquad v' = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

$$dv = -p(x)v \cdot dx, \qquad v \neq 0$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x) \cdot dx$$

$$\ln|v| = -\int p(x) \cdot dx$$

$$v = e^{-\int p(x) \cdot dx} \qquad (5).$$

Подставим (5) в (4), найдем функцию *u*.

Пример 1. Найти общее решение линейного уравнения $xy' - y = x^3$.

Решение. Положим $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$.

$$x(u'v + uv') - uv = x^3 \qquad : x \neq 0$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2$$

Выберем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, тогда

$$v' - \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$dv = \frac{v}{x}dx \qquad : \ v \neq 0$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

$$u'v = x^2$$
$$u'x = x^2$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x = x^2 \qquad : \ x \neq 0$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$du = x \cdot dx$$

$$\int du = \int x \cdot dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + c$$

Следовательно, $y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)\cdot x$

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$, y(1)=1.

Решение.

$$y = uv; y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = \frac{2}{x^3}$$

$$u'v + u(v' + \frac{3}{x}v) = \frac{2}{x^3}$$

$$v' + \frac{3}{x}v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -3\int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|v| = -3\ln|x|$$
$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x^3}\right|$$
$$v = \frac{1}{x^3}$$
$$u'v = \frac{2}{x^3}$$
$$u'\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$
$$u' = 2$$
$$\frac{du}{dx} = 2$$
$$du = 2dx$$
$$\int du = 2\int dx$$
$$u = 2x + C$$
$$y = (2x + C)\frac{1}{x^3}$$
$$1 = (2 + C)\cdot 1$$
$$2 + C = 1$$
$$C = -1$$
$$y = (2x - 1)\frac{1}{x^3}.$$

Задачи. Решить уравнение:

1. $y' + y = 2$
2. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^4$
3. $xy' - 3y = x^4$

4. $\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{x}$

5. $x^{'}-3x=e^{-t}$

6. $y^{'}+2xy=2xe^{x^2}$

7. $y^{'}\cos x+y\sin x=1$

8. $(x+1)y^{'}+y=\cos x$.

Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию,

1. $y^{'}-2y=1$, y(0)=$\dfrac{1}{2}$

2. $y^{'}-\dfrac{3}{x}y=x$, y(1)=1

3. $2y^{'}-y=e^{x}$, y(0)=5

4. $\dfrac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}$, y(2)=0

5. $x(y^{'}-x\cos x)=y$, y($\dfrac{\pi}{2}$)=$\dfrac{\pi}{2}$

6. $xy^{'}+y=\sin x$, y($\dfrac{\pi}{2}$)=$\dfrac{1}{\pi}$

7. $x^2y^{'}+2xy=-4$, y(-1)=0.

Уравнение Бернулли.
Пример.
$y'+y=3e^{-2x}y^2$

§ 5. Дифференциальные уравнения второго порядка.

Мы перейдем теперь к изучению дифференциальных уравнений вида

$$F(x,y,y',y'')=0\,.$$

Обычно рассматривают уравнения, разрешенные относительно производной

$$y'' = f(x, y, y').$$

Начнем с уравнения $y'' = x$.

Последовательно интегрируя, найдем сначала первую производную: $y' = \frac{x^2}{2} + C_1$, а затем и саму функцию:

$$y = \int (\frac{x^2}{2} + C_1)dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Так как мы интегрировали дважды, то и получили две произвольные постоянные, которые обозначили C_1, C_2.

Дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ имеет бесчисленное множество решений, которые задаются формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные. Эта совокупность решений называется общим решением.

Частное решение уравнения отыскивается при помощи задания начальных условий
$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$.

Геометрический смысл начальных условий заключается в том, что помимо точки (x_0, y_0) через которую должна проходить интегральная кривая, мы задаем еще угловой коэффициент касательной (y_0') к этой кривой. Отметим, что так как общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, то через данную точку проходит бесчисленное множество интегральных кривых, лишь одна из которых имеет данный угловой коэффициент.

§ 6. Частные случаи уравнений второго порядка.

Возьмем дифференциальное уравнение второго порядка
$y'' = f(x, y, y')$

И рассмотрим частные случаи, легко приводимые к дифференциальным уравнениям первого порядка.

1. Правая часть уравнения не содержит у и у′:

$$y'' = f(x).$$

Так как $y'' = (y')'$, то

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Интегрируя еще раз, будем иметь:

$y = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

2. Правая часть уравнения не содержит у:

$$y'' = f(x, y'). \ (*)$$

Положим $y' = z, y'' = z'$ и уравнение (*) обращается в уравнение первого порядка относительно z:

$$z' = f(x, z).$$

Найдя решение этого уравнения, $z = \varphi(x, C_1)$, мы искомое решение получим интегрированием равенства $y' = z$, т.е.

$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

Решение.

Полагая $y' = z, y'' = z'$, приходим к уравнению первого порядка

$z' + \frac{z}{x} = x.$

Уравнение является линейным.

$$z = u \cdot v, z' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x$$

$$u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = x$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = \frac{1}{x}$$

$$u'v = x$$

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x} = x$$

$$du = x^2 dx$$

$$\int du = \int x^2 dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$z = (\frac{x^3}{3} + C_1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Тогда $\quad y' = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x},$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3. Правая часть уравнения не содержит x:

$$y'' = f(y, y').$$

Положим $y' = p$ и будем считать p функцией от y.

Дифференцируя это равенство, получим $y'' = \dfrac{dp}{dx}$. Чтобы исключить x, произведем следующее преобразование:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p.$$

Таким образом,

$$y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Подставив в уравнение, будем иметь:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

т.е. уравнение первого порядка относительно p как функции от y.

Решив его, найдем $p = \varphi(y, C_1)$. Тогда искомое решение получим из уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y, C_1),$$

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример.

Решить уравнение

$$2yy'' + y'^2 = 0.$$

Решение.

Полагая

$y' = p, y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получим:

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}$$

$$\int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dy}{2y}$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y}dy = C_1 dx$$

$$\int\sqrt{y}dy = C_1\int dx$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2.$$

Примеры.

(2) $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0$

$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

Ответ: $\operatorname{tg} y = x$

(3) $4y^3 y'' = y^4 - 16$

$y(0) = 2\sqrt{2}$; $y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\ln|y^2 - 4| = x + \ln 4$

(4) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)(y')^2 = 0$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Ответ. $\dfrac{1}{1-\ln y} = x + 1$

§ 7.Линейные дифференциальные уравнения.

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение первой степени относительно неизвестной функции и ее производных.

Мы будем записывать его в виде

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \ (*)$$

где a_1, a_2 – функции независимой переменной x или постоянные величины.

Функция $f(x)$ называется правой частью уравнения. Если функция $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение (*) называется линейным уравнением без правой части (или однородным). В противном случае уравнение (*) называется линейным уравнением с правой частью (или неоднородным).

1. Линейные уравнения без правой части, т.е.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (**)$$

Теорема. Если $y_1(x), y_2(x)$ – решения линейного уравнения (**), то функция

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ при любых постоянных C_1, C_2 также является решением уравнения.

Доказательство. Продифференцируем дважды функцию $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2',$$

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''.$$

Подставим y, y', y'' в левую часть уравнения (**). Получим:

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2).$$

Выражения в скобках тождественно равны нулю, т.к. функции y_1, y_2 – решения уравнения (**).

На основе доказанной теоремы мы можем сделать следующий вывод о структуре общего решения линейного уравнения без правой части (**).

Если y_1, y_2 – решения уравнения (**) такие, что их отношение не равно постоянной величине, то линейная комбинация этих функций

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (***)$$

является общим решением уравнения.

В предыдущей теореме мы доказали, что функция (***) является решением линейного уравнения без правой части, а так как она содержит две произвольные постоянные, то она и является общим решением.

Зная общее решение уравнения, мы можем по заданным начальным условиям отыскивать соответствующее частное. Пусть, например, заданы начальные условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0,$ причем в точке x_0 коэффициенты a_1, a_2 непрерывны. Подставляя эти значения в выражение для общего решения и его производной, получим систему линейных уравнений относительно C_1, C_2:

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0, C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = y_0'.$$

Для того чтобы из общего решения можно было получить любое частное, надо проверить, что полученная система имеет решение при любых начальных данных y_0, y_0'.

Для этого определитель системы должен быть отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство этого факта для общего случая мы опустим, а позже произведем соответствующую проверку для частных случаев.

2. Линейные уравнения с правой частью.

Пусть дано линейное уравнение второго порядка с правой частью

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (*)$$

Уравнение без правой части

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (**)$$

получающееся из данного уравнения (*), если вместо свободного члена $f(x)$ взять нуль, назовем соответствующим уравнению (*). Докажем теорему о структуре общего решения уравнения с правой частью (*).

Теорема. Общее решение уравнения с правой частью (*) можно составить как сумму общего решения соответствующего уравнения без правой части (**) и какого-нибудь частного решения данного уравнения (*).

Доказательство. Обозначим через Φ(x) общее решение уравнения (**), а через φ(x)- какое-нибудь частное решение уравнения (*). Возьмем функцию

$$y = \Phi(x) + \varphi(x).$$

Имеем: $y' = \Phi'(x) + \varphi'(x), y'' = \Phi''(x) + \varphi''(x).$

Подставляя выражения для y, y', y'' в левую часть заданного уравнения (*), найдем:

$$\Phi''(x) + \varphi''(x) + a_1\left[\Phi'(x) + \varphi'(x)\right] + a_2\left[\Phi(x) + \varphi(x)\right] =$$
$$= \left[\Phi''(x) + a_1\Phi'(x) + a_2\Phi(x)\right] + \left[\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_2\varphi(x)\right].$$

Выражение в первой квадратной скобке равно нулю, т.к. $\Phi(x)$ – решение уравнения без правой части (**), а выражение во второй квадратной скобке равно $f(x)$, т.к. $\varphi(x)$ – решение уравнения с правой частью (*).Следовательно, функция $y = \Phi(x) + \varphi(x)$ действительно есть решение уравнения (*).

Итак, для того чтобы найти общее решение уравнения с правой частью, нужно найти общее решение соответствующего уравнения без правой части и лишь одно какое-нибудь частное решение заданного уравнения. Это можно записать так:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \varphi(x),$$

где y_1, y_2 – частные решения соответствующего уравнения без правой части, а $\varphi(x)$ – частное решение уравнения с правой частью.

§ 8 . Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

где постоянные $p, q \in R$.

Найдем общее решение такого уравнения.

Будем искать частное решение уравнения (1) в форме $y = e^{kx}$, где k -постоянное число, подлежащее определению.

Имеем: $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$.

Следовательно, должно иметь место тождество

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

или, так как $e^{kx} \neq 0$,

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (2)$$

называется характеристическим уравнением для уравнения (1).

В зависимости от корней k_1 и k_2 характеристического уравнения (2) получаем общее решение уравнения (1) в виде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (3)$$

если k_1 и k_2 - различные действительные числа;

$$y = (C_1 x + C_2) e^{k_1 x}, \quad (4)$$

если $k_1 = k_2$;

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (5)$$

если $k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta$ - комплексные числа, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Докажем каждый из этих случаев в отдельности.

1).Корни характеристического уравнения действительные и различные.

При этом оба корня могут быть взяты в качестве показателей k функции e^{kx}, и мы сразу получим два решения уравнения (1): $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$. Ясно, что их отношение не является постоянной величиной: $\dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x}$.

Общее решение в случае действительных и различных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Пример 1.
Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение для данного уравнения принимает вид

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Т.к. $k_1 = 2, k_2 = 3$, то в соответствии с формулой (3) общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

2).Корни характеристического уравнения действительные и равные.
В этом случае мы непосредственно получаем только одно решение $y_1 = e^{k_1 x}$.
Покажем, что в качестве второго решения можно взять функцию

$$y_2 = xe^{k_1 x}.$$

Продифференцируем дважды функцию y_2:

$$y_2' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x},$$

$$y_2'' = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения (1):

$$2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} + p(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}) + qxe^{k_1 x} =$$
$$= e^{k_1 x}\left[x(k_1^2 + pk_1 + q) + (2k_1 + p)\right]$$

Поскольку k_1 – корень характеристического уравнения, то

$k_1^2 + pk_1 + q = 0,$

а так как k_1 – двукратный корень, то по формуле Виета
$k_1 + k_1 = -p; 2k_1 + p = 0.$
Таким образом, выражение, заключенное в квадратной скобке, равно нулю, и функция

$y_2 = xe^{k_1 x}$ действительно является решением уравнения (1).

Итак, в случае действительных равных корней характеристического уравнения общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}.$$

И здесь легко проверить, что определитель, ни при каком значении x_0 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} e^{k_1 x_0} & x_0 e^{k_1 x_0} \\ k_1 e^{k_1 x_0} & e^{k_1 x_0} + k_1 x_0 e^{k_1 x_0} \end{vmatrix} = e^{2k_1 x_0} \neq 0.$$

Пример 2.
Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = -2$.
В соответствии с формулой (4) получаем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

3). Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные числа:
$k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta.$
Покажем, что в этом случае решениями будут служить функции

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$

Проведем проверку для функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x.$

$y_1' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x,$

$y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\cos\beta x.$

Подставляя найденные производные в левую часть уравнения (1) и группируя слагаемые, получим:

$e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q)\cos\beta x - (2\alpha\beta + p\beta)\sin\beta x\right].$

Если подставить корень $\alpha + \beta i$ в характеристическое уравнение , то будем иметь:

$(\alpha + \beta i)^2 + p(\alpha + \beta i) + q = 0$

$(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) + i(2\alpha\beta + p\beta) = 0.$

Комплексное число равно нулю только в том случае, если равны нулю его действительная и мнимая части, следовательно,

$\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q = 0,$

$2\alpha\beta + p\beta = 0.$

Эти равенства показывают, что в результате подстановки функции $y = e^{\alpha x}\cos\beta x$

в уравнение мы получаем нуль. Совершенно аналогично можно произвести проверку и для функции $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$

Итак, в случае комплексных сопряженных корней характеристического уравнения общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x_0}\cos\beta x_0 & e^{\alpha x_0}\sin\beta x_0 \\ \alpha e^{\alpha x_0}\cos\beta x_0 - \beta e^{\alpha x_0}\sin\beta x_0 & \alpha e^{\alpha x_0}\sin\beta x_0 + \beta e^{\alpha x_0}\cos\beta x_0 \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x_0}$$

всегда отличен от нуля.

Пример 3.

Проинтегрировать уравнение $y'' + y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k + 1 = 0$.
Найдем корни этого уравнения.

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3 \cdot i^2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad i^2 = -1$$

$$k_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i; \qquad k_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}; \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

В соответствии с формулой (5) находим общее решение

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Пример 4.
Найти частное решение дифференциального уравнения.

$$y'' + y' - \frac{3}{4} y = 0, \quad y(0) = 6, \ \ y'(0) = 1.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k - \frac{3}{4} = 0$.

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{3}{4}}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{1}{2}; \quad k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Т.к. корни k_1 и k_2 - различные действительные, то общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Найдем частное решение.

Подставим в общее решение первое начальное условие:

$y(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 6$.

Чтобы составить второе уравнение, продифференцируем общее решение и воспользуемся вторым начальным условием:

$$y' = \frac{1}{2} C_1 \cdot e^{\frac{x}{2}} - \frac{3}{2} C_2 \cdot e^{-\frac{3}{2}x},$$

$$y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} C_1 - \frac{3}{2} C_2 = 1.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ \frac{1}{2} C_1 - \frac{3}{2} C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ C_1 - 3C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Подставив найденные значения постоянных в общее решение, получим частное решение

$$y = 5 \cdot e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{3}{2}x},$$

Задачи.

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$
2. $y'' - 2y' - 8y = 0$
3. $y'' + 3y' + 2y = 0$
6. $y'' + 8y' + 16y = 0$
7. $y'' - 4y' + 13y = 0$
8. $y'' + 6y' + 25y = 0$

4. $y'' - 4y' = 0$

9. $y'' + 9y = 0$

5. $y'' - 2y' + y = 0$

10. $y'' - 16y = 0$

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

1. $2y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

2. $y'' + 4y = 0, \quad y\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$

3. $y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 6$

4. $9y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \dfrac{1}{9}$

5. $y'' - 12y' + 37y = 0, \quad y(2\pi) = 1, \quad y'(2\pi) = 6$

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка:

$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$

Характеристическое уравнение

$a_0 \kappa^3 + a_1 \kappa^2 + a_2 \kappa + a_3 = 0$

Если корни $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_3$, то общее решение имеет вид:

$$y = c_1 e^{\kappa_1 x} + c_2 e^{\kappa_2 x} + c_3 e^{\kappa_3 x}$$

если $\kappa_1 = \kappa_2 \neq \kappa_3$, то общее решение будет иметь вид:

$$y = c_1 e^{\kappa_1 x} + c_2 x e^{\kappa_1 x} + c_3 e^{\kappa_3 x}$$

Если $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$, то общее решение имеет вид:

$$y = c_1 e^{\kappa_1 x} + c_2 x e^{\kappa_1 x} + c_3 x^2 e^{\kappa_1 x}$$

Если κ_1 - действительное число, $\kappa_{2,3} = \alpha \pm i\beta$, то общее решение:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + e^{\alpha x} \cdot (C_2 \cos \beta x + C_3 \sin \beta x)$$

Пример 5.

Найти общее решение уравнения

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение $k^3 + 2k^2 + k = 0$ и находим его корни:

$k(k^2 + 2k + 1) = k(k+1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_{2,3} = -1$

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, причем два из них равные.

Общее решение уравнения

$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}$

$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}$

Где c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

Пример 6.

Решить уравнение

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Решение: составим характеристическое уравнение:

$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$.

Преобразуя левую часть уравнения, получим $k^2(k-2) - (k-2) = 0$, (k-2)(k^2-1)=0, Откуда $k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2$.

Получаем общее решение уравнения

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}.$$

Задачи. Решить уравнения.

1) $y''' - 7y'' + 15y' = 0$

2) $y''' - 8y = 0$

3) $y''' - 4y'' + y' - 4y = 0$

4) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

5) $y''' - 3y' - 2y = 0$

6) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

7) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

§ 9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (*)$$

1. Пусть правая часть уравнения (*) имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{mx},$$

где $P(x)$ – многочлен. Тогда уравнение (*) имеет частное решение вида

$$y = x^n Q(x) e^{mx},$$

где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$, причем если число m не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, то n=0, а если является, то n-кратность этого корня.

Пример.

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 1 + x.$$

Решение. Найдем общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0.$

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет двукратный корень

$k = 1.$ Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Правая часть имеет рассматриваемую форму,

причем $m = 0, P(x) = 1 + x.$

Так как число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y = Ax + B,$$

где $A, B -$ постоянные.

Дифференцируя и подставляя в дифференциальное уравнение, находим коэффициенты:

$y' = A, y'' = 0.$

$-2A + Ax + B = 1 + x.$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства $A = 1, -2A + B = 1,$

получим $A = 1, B = 3.$

Итак, частным решением заданного уравнения является функция $y = x + 3,$

а его общим решением - функция

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 3.$$

2.Пусть правая часть уравнения (*) имеет вид

$$f(x) = a\cos nx + b\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то уравнение имеет частное решение вида

$$y = A\cos nx + B\sin nx.$$

Если же числа $\pm in$ служат корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y = x(A\cos nx + B\sin nx).$$

Пример.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -2 \pm 3i.$

Значит, общее решение соответствующего уравнения без правой части запишется так:

$$y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Так как числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Дважды дифференцируем:

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

и подставляем в уравнение:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x + 13A\cos 2x + 13B\sin 2x =$$
$$= 5\sin 2x.$$

Приравнивая друг другу коэффициенты при $\sin 2x, \cos 2x$ в обеих частях равенства, получим:

$$-8A + 9B = 5$$
$$9A + 8B = 0.$$

Отсюда $A = -\frac{8}{29}, B = \frac{9}{29}$, т.е. частным решением будет функция

$$-\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x,$$

а общим

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

3. Если правая часть уравнения (*) имеет вид

$$f(x) = e^{mx}(P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx),$$

где $P_1(x), P_2(x)$ – многочлены, а числа $m \pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y = e^{mx}(R_1(x)\cos nx + R_2(x)\sin nx),$$

где $R_1(x), R_2(x)$ – многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x), P_2(x)$.

Если числа $m \pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то указанную форму частного решения следует умножить на x.

Пример.

Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 4x \sin x.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$.

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение ищем в виде

$$y = x\left[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right].$$

Имеем:

$$y' = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x +$$
$$+ x\left[A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x\right]$$
$$y'' = A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x + A\cos x -$$
$$-(Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x +$$
$$+ x\left[-A\sin x - A\sin x - (Ax+B)\cos x + C\cos x + C\cos x - (Cx+D)\sin x\right] =$$
$$= \left[-Ax^2 + (4C-B)x + (2A+2D)\right]\cos x +$$
$$+ \left[-Cx^2 - (4A+D)x + (2C-2B)\right]\sin x.$$

Подставляя в уравнение, находим:
$\left[2Cx + (A+D)\right]\cos x + \left[-2Ax + (C-B)\right]\sin x = 2x\sin x.$
Это равенство будет тождественным только при
$2C = 0, A + D = 0, -2A = 2, C - B = 0.$
Отсюда $A = -1, B = 0, C = 0, D = 1.$
Следовательно, получаем частное решение

$$y = x(\sin x - x\cos x).$$

Общее решение имеет вид

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x(\sin x - x\cos x).$$

Если правая часть $f(x)$ уравнения (*) равна сумме функций
$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_p(x)$
и $\varphi_i(x)$ - частные решения уравнений
$y'' + py' + qy = f_i(x), (i = 1,2,..., p)$ соответственно, то сумма
$\varphi = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... + \varphi_p(x)$ есть частное решение уравнения (*).

Задачи.

Решить уравнения.

1) $7y'' + 15y' = 3e^x$

2) $y'' - 8y = 2x^2 - 1$

3) $4y'' + y' - 4y = x - 4$

4) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$

5) $y'' - 3y' - 2y = \sin x$

6) $3y'' + 3y' - y = \cos 2x$

7) $6y'' + 11y' - 6y = x \cdot e^x$.

Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными:

1) $y' = (x + \sin x)y$

2) $y' = e^{-y} - 1$

3) $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$

4) $\sqrt{1-x^2}\, y' + xy = 0$

5) $(\sin x)y' = y \ln y$

6) $y' = e^{x+y}$

7) $y \sin x\, dx + \cos x\, dy = 0$

8) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$

9) $(1+x)dy = 2y\, dx$

10) $xydx + (x+1)dy = 0$

11) $(1+y^2)dx - xdy = 0$

12) $y' = \sqrt[3]{y^2}(x+1)$

13) $y' = \sqrt{1-y^2}\, x$

14) $y' = 4x\sqrt{y-1}$

15) $xy' + y = y^2$

16) $dy - xy(y+2)dx = 0$

17) $\sqrt{y}\sin^2 x\,dx + dy = 0$

18) $xy' = 2y + 1$

19) $(1-x)y' - y = 0$

20) $y' = \dfrac{x(1-y^2)}{y}$

21) $y' = \dfrac{y\cos x}{1+y}$

22) $(1+e^x)yy' = e^x$

23) $\sqrt{1-y^2}\,dx + (1+x^2)dy = 0$

24) $y' = xe^y$

25) $y^2dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

1) $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$

2) $y' - \dfrac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2$

3) $y' + y\,tg\,x = \cos^2 x$

4) $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1)$

5) $y' - y\,ctg\,x = 2x\sin x$

6) $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$

7) $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\, y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$

8) $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$

9) $y' - \dfrac{2}{x+1}\, y = (x+1)^3$

10) $y' + 3y = xe^{-3x}$

11) $xy' - y = x^2 \sin x$

12) $y' + \dfrac{4x}{x^2+1}\, y = \dfrac{3}{x^2+1}$

13) $y' - y = e^x$

14) $y' - y\, ctg\ x = \sin x$

15) $y' - y\, tg\ x = \dfrac{1}{\cos x}$

16) $(1-x^2)y' + xy = 1$

17) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

18) $y' + y = e^{-x}$

19) $y' - \dfrac{3y}{x} = x$

20) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$

21) $(2x+1)y' + y = x$

22) $y' + y \cos x = \sin 2x$

23) $y' - ytg\ x = ctg\ x$

24) $y' - y\, tg\ x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

25) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$

Найти общее решение однородного уравнения.

1) $(xy' - y) \cdot \arcsin\frac{y}{x} = \sqrt{x^2 - y^2}$

2) $4x^2 y' - 4xy - y^2 = 0$

3) $xy' = y(\ln\frac{y}{x} + 2)$

4) $xyy' - y^2 - 2x^2 = 0$

5) $xy' = y + \frac{x}{1 + e^{\frac{y}{x}}}$

6) $(xy + 2y^2)dx + (2xy - x^2)dy = 0$

7) $(xy' - y)\sin\frac{y}{x} = x\cos^3\frac{y}{x}$

8) $(5x - y)y' = x + 5y$

9) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$

10) $(xy' - y)\ln\frac{y}{x} = x$

11) $xy'\sin\frac{y}{x} = y\sin\frac{y}{x} + x$

12) $y' = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$

13) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$

14) $(xye^{\frac{y}{x}} + x^2)dy - y^2 e^{\frac{y}{x}} dx = 0$

15) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$

16) $(xy' - y)(tg\frac{y}{x} + 1) = x$

17) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

18) $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x}$

19) $xdy = (3y - 4x)dx$

20) $xy' + xtg^2\frac{y}{x} = y - x$

21) $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$

22) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$

23) $xy' = y - x\sin^2\frac{y}{x}$

24) $y' = \frac{2y}{3x} + \frac{x^2}{3y^2}$

25) $(xy' - y)\cos\frac{y}{x} = x\sin^4\frac{y}{x}.$

Найти частное решение дифференциального уравнения.

1) $y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
2) $2y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$
3) $3y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -\frac{4}{3}$
4) $y'' + 2\sqrt{3}y' + 4y = 0, \quad y(0) = \sqrt{3}, y'(0) = 2$
5) $6y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$
6) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = e^2, y'(-1) = e^2$

7) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $\quad y(\frac{\pi}{2}) = -1, y'(\frac{\pi}{2}) = -1$

8) $y'' - 10y' + 26y = 0$, $\quad y(\pi) = 1, y'(\pi) = 1$

9) $4y'' - 3y' = 0$, $\quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{3}{4}$

10) $y'' - 8y' + 15y = 0$, $\quad y(\frac{1}{4}) = 2e, y'(\frac{1}{4}) = 4e$

11) $3y'' - y' - 2y = 0$, $\quad y(0) = 3, y'(0) = -2$

12) $y'' + 4y' = 0$, $\quad y(-\frac{\pi}{4}) = 1, y'(-\frac{\pi}{4}) = 2$

13) $9y'' + 2y' + 10y = 0$, $\quad y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{9}$

14) $y'' + 6y' + 10y = 0$, $\quad y(\pi) = e^{-3\pi}, y'(\pi) = 0$

15) $12y'' - y' - y = 0$, $\quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{12}$

16) $y'' - 12y' + 37y = 0$, $\quad y(2\pi) = 1, y'(2\pi) = 6$

17) $3y'' - 7y' - 6y = 0$, $\quad y(0) = 1, y'(0) = -8$

18) $y'' - 2y' + 17y = 0$, $\quad y(\frac{\pi}{4}) = 0, y'(\frac{\pi}{4}) = 3$

19) $2y'' - 5y' - 3y = 0$, $\quad y(0) = 0, y'(0) = \frac{7}{2}$

20) $4y'' - 4y' + 5y = 0$, $\quad y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$

21) $y'' - 6y' = 0$, $\quad y(0) = 1, \ y'(0) = 6$

22) $y'' - 6y' + 5y = 0$, $\quad y(1) = 0, y'(1) = 4$

23) $5y'' - 2y' = 0$, $\quad y(0) = -4, y'(0) = -1$

24) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $\quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

25) $2y'' + 7y' = 0$, $\quad y(0) = 1, y'(0) = -8$

Найти общее решение дифференциального уравнения третье-
го порядка:

1) $4y''' + y' = 0$

2) $y''' - 3y' = 0$

3) $3y''' - 4y'' + y' = 0$

4) $y''' + 2y'' + y' = 0$

5) $3y''' - 4y'' + y' = 0$

6) $2y''' + 2y'' + y' = 0$

7) $y''' + 8y'' + 16y' = 0$

8) $2y''' - y'' + y' = 0$

9) $y''' - 6y'' + 6y' = 0$

10) $y''' + 16y' = 0$

11) $4y''' + 2y'' + 5y' = 0$

12) $y''' - y'' + 2y' = 0$

13) $3y''' - y'' = 0$

14) $4y''' - 4y'' - 3y' = 0$

15) $9y''' + 4y' = 0$

16) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$

17) $y''' + 2y'' + 10y' = 0$

18) $4y''' - 12y'' + 9y' = 0$

19) $3y''' + 2y'' = 0$

20) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$

21) $4y''' + 20y'' + 25y' = 0$

22) $3y''' + 2y'' - y' = 0$

23) $9y''' + y' = 0$

24) $y''' - 9y' = 0$

25) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1) $xy'' - 2y' - x = 0$

2) $xy'' - y' = x^2 \cos x$

3) $(x^2 - 1)y'' = 2y'$

4) $y'' x \ln x - y' = x \ln^2 x$

5) $(1 + x)y'' + y' = 1$

6) $y'' + y' tgx = \dfrac{1}{\cos x}$

7) $x \ln x \cdot y'' = y'$

8) $y'' + 2 \sin x \cdot \sqrt{y'} = 0$

9) $e^x y'' + y'' - e^x y' = 0$

10) $y'' + y' tgx = \sin 2x$

11) $xy'' + 5y' - 1 = 0$

12) $y'' tgx = y' + 1$

13) $xy'' + x(y')^2 = y'$

14) $y'' tgx - y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

15) $(1 + \sin x)y'' = y' \cos x$

16) $xy'' - 2y' = 2x^4$

17) $xy'' + y' = 2x^2 + 3x + 4$

18) $x^2 y'' + xy' = 1$

19) $\sqrt{1 - x^2}\, y'' - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, y' = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

20) $(xy'' + y') \ln x = 2y'$

21) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$

22) $x^2 y'' = (y')^2$

23) $yy'' = (y')^2 - y$

24) $yy'' = 2y'(y' + y^4)$

25) $y'' + \dfrac{y'}{x} = (y')^3 x^2.$

Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

1) $y'' + y' - 2y = 10\sin x$

2) $y'' - 9y' = 8(x+1)e^x$

3) $y'' - y = 5x + 2$

4) $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$

5) $y'' - 4y' + 3y = 3x^2 + x$

6) $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x$

7) $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$

8) $y'' - y' - 2y = 4x$

9) $y'' - 4y = 2x^2 - 2x + 1$

10) $y'' + 2y' + 2y = 2(x+1)$

11) $y'' + 6y' + 9y = 10\cos x$

12) $y'' - 2y' + y = \cos 3x$

13) $y'' - 2y' + 5y = 17\sin 2x$

14) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{x}{2}$

15) $y'' - 10y' + 25y = 6e^{-x}$

16) $y'' - 3y' - 4y = 4e^x$

17) $y'' + 3y' - 2y = x^2 - 1$

18) $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = x(x+2)$

19) $y'' + 3y' + 2y = \sin x + 2\cos x$

20) $y'' + 5y' + 6y = 2e^{3x}$

21) $y'' - 25y = 25x^2 - 5x$

22) $y'' + 35y = 36x^2 - 1$

23) $y'' - 5y' + 6y = 3xe^x$

24) $y'' - 3y' - 10y = x^2 + 1$

25) $y'' - 6y' - 7y = 32\cos x.$

Найти вид общего решения дифференциального уравнения

1) $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \cdot \cos x + x \cdot \sin 2x$

2) $5y''' - 4y'' - 12y' = 3 + x \cdot e^{2x} + 5\sin 2x$

3) $y'' - 6y' + 10y = e^{5x} + 5\cos x$

4) $y''' - 10y'' + 25y' = 4e^{5x} + 5\sin 5x - 2x$

5) $y'' - 2y' = 3x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot e^{2x}$

6) $y''' - 12y'' + 36y' = 7\cos 6x + 4 - 5e^{-6x}$

7) $y'' + 9y' = 5x + 7e^{-9x}$

8) $y''' - 8y'' + 16y' = 4x \cdot \sin 4x + x \cdot e^{4x} + 2$

9) $y'' - 2y' + 2y = e^x \cdot \cos x + 5x$

10) $6y''' - y'' - y' = x^2 \cdot \sin\frac{x}{2} + e^{-\frac{x}{3}} - 2$

11) $y'' + 4y = x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot \sin 2x$

12) $2y''' - y'' - y' = x \cdot e^x + \cos x + x^3$

13) $y'' + y = x \cdot \cos x + 5e^x$

14) $y''' - 2y'' = 3e^{2x} \cdot \cos 2x - 5x^2 + xe^{2x}$

15) $y'' + 16y = 3\cos 4x + x \cdot e^{4x}$

16) $y''' - 9y' = 2 + 3x^2 \cos 3x + 7e^{3x} \sin 3x$

17) $y'' - 6y' + 25y = 5\sin 4x + xe^{3x}$

18) $y''' - 4y'' = 3x^2 + 1 + x\sin 4x + 5e^{4x}$

19) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x - \cos 2x$

20) $y''' + 8y'' + 17y' = 3xe^{-4x} \sin x + \cos 4x + x^2 e^x$

21) $y'' + 9y = 8\sin 3x + x^2 + 1$

22) $y'' + 6y' + 13y = e^{-13x} \cos 2x + e^x$

23) $y''' + y'' - 12y' = 5 + 2\cos 3x + 3x^2 e^{-4x}$

24) $2y'' + 3y' - 5y = 3x + 5\sin 7x - 3xe^x$

25) $y''' + 2y'' + y' = 4 + x\cos x - 4e^{-x}$.