

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



**Дао Нгок Кхоа**

**РАСЧЁТ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПО МЕТОДУ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ**

Специальность: 2.1.9. Строительная механика.

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:

Доктор технических наук, доцент

Филатов Владимир Владимирович.

Москва – 2023

Светлой памяти нашего учителя,  
Габбасова Радека Фаттыховича  
посвящается

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| ОГЛАВЛЕНИЕ.....   | 3  |
| ВВЕДЕНИЕ.....   | 5  |
| ГЛАВА 1. ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ .....   | 11 |
| 1.1. История вопроса расчета пластин в геометрически нелинейной постановке.....   | 11 |
| 1.2. Современное состояние вопроса расчета пластин в геометрически нелинейной постановке.....   | 16 |
| 1.3. Методы решения нелинейных задач на упругом основании .....   | 24 |
| 1.4. Метод последовательных аппроксимаций (МПА).....  | 30 |
| 1.5. Выводы по главе 1 .....  | 34 |
| ГЛАВА 2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН НА СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА БАЗЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ МПА.....                | 36 |
| 2.1. Разрешающие дифференциальные уравнения гибких пластинок и переход к безразмерным величинам. ....   | 36 |
| 2.2. Алгоритм расчета .....   | 40 |
| 2.3. Аппроксимация системы дифференциальных уравнений разностными уравнениями МПА.....  | 41 |
| 2.4. Учёт краевых условий.....  | 44 |
| 2.5. Выводы по главе 2 .....  | 51 |
| ГЛАВА 3. РАСЧЕТ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ.....  | 52 |
| 3.1. Дифференциальные уравнения гибких пластин на упругом основании .....   | 52 |
| 3.2. Переход к безразмерным величинам.....  | 52 |
| 3.3. Аппроксимация системы дифференциальных уравнений разностными уравнениями МПА.....  | 54 |
| 3.4. Учет краевых условий.....  | 54 |
| 3.5. Выводы по главе 3.....   | 55 |
| ГЛАВА 4. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ ПО РАСЧЕТУ ГИБКИХ ПЛАСТИН НА СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ БЕЗ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ И НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ. ....                        | 56 |
| 4.1. Разработка программ для ЭВМ по расчету гибких пластин на статические нагрузки без упругого основания с использованием пакета прикладных программ MATLAB..... | 56 |
| 4.2. Разработка программ для эвм по расчету гибких пластин на статические нагрузки на упругом основании с применением разностных уравнений МПА.....               | 63 |
| 4.3. Примеры расчета гибких пластин без упругого основания. ....  | 65 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.3.1. Расчёт гибкой квадратной пластины, защемлённой по всем краям, загруженной равномерно распределённой нагрузкой. ....  | 65  |
| 4.3.2. Расчёт шарнирно опёртой гибкой квадратной пластинки со свободно сближающимися краями, загруженной равномерно распределённой нагрузкой. ....  | 74  |
| 4.3.3. Квадратная пластинка с двумя шарнирными и двумя заделанными сближающимися краями. ....   | 77  |
| 4.3.4. Расчёт гибкой квадратной пластинки, загруженной равномерно распределённой нагрузкой на половине пролета. ....  | 78  |
| 4.3.5. Расчёт гибкой квадратной защемлённой пластинки со свободно сближающимися краями, половина площади которой загружена распределённой нагрузкой одной интенсивности, а вторая половина другой интенсивности. .... | 82  |
| 4.4. Примеры расчета гибких пластинок на упругом основании. ....  | 91  |
| 4.4.1. Расчёт шарнирно опёртой гибкой квадратной пластинки со свободно сближающимися краями, загруженной равномерно распределённой нагрузкой, с учетом отпора упругого основания. ....                                | 91  |
| 4.4.2. Расчёт гибкой квадратной пластинки, со свободно сближающимися защемлёнными краями, с учётом отпора упругого основания. ....  | 98  |
| 4.4.3. Расчёт гибкой прямоугольной пластины на несплошном упругом основании. ....   | 99  |
| 4.4.4. Расчёт гибкой квадратной пластинки, на упругом основании с переменным коэффициентом постели. ....  | 105 |
| 4.5. Выводы по главе 4. ....  | 110 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ....  | 112 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ. ....   | 114 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А. ....  | 136 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ....  | 137 |

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы диссертационного исследования.** Вьетнам - развивающаяся страна, находящаяся в Юго-Восточной Азии. «Экономика Вьетнама постепенно восстанавливается после кризиса и основным драйвером этого процесса является строительная отрасль. Темпы роста строительного сектора во Вьетнаме в период с 2015 по 2019 гг. составляют в среднем 8,8% в год и являются самыми высокими за весь посткризисный период. По данным Главного управления статистики, с точки зрения вклада в ВВП страны строительный сектор занимает третье место среди других отраслей экономики.» [52]. При этом существует ряд факторов, не только замедляющих темпы роста строительной отрасли, но и являющихся угрозой ее стабильного развития. Низкая производительность труда, недостаточное количество высококвалифицированных инженерно-технических кадров, недостаточная степень внедрения информационных технологий и технологий цифрового моделирования в производственные процессы. Решение этих проблем – важная задача, стоящая не только перед руководством Вьетнама, но и перед всем вьетнамским обществом.

Современные строительные объекты представляют собой сложные пространственные системы, призванные обеспечить высокотехнологичные производственные процессы и процессы жизнеобеспечения. В последние десятилетия наметился рост нетипового строительства, значительно увеличилась массовая доля высотных и большепролетных зданий и сооружений. При проектировании все чаще выдвигаются требования: снижения материалоемкости; выявления резервов несущей способности конструкций; эстетической выразительности сооружений, усложняющих расчетную схему; моделирования процессов возведения и жизненного цикла объектов. Учет нелинейной работы конструкций позволяет строить более адекватные расчетные схемы сооружений и наиболее точно прогнозировать процессы, происходящие во время строительства и эксплуатации сооружения.

Решение практических задач нелинейной строительной механики в подавляющем большинстве случаев выполняется с применением вычислительных комплексов, созданных на базе метода конечных элементов (МКЭ). Для оценки

точности и достоверности получаемых таким образом результатов, необходимо развивать другие методы расчета. В данной работе для решения задач по расчету прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке привлекается хорошо себя зарекомендовавший при расчете строительных конструкций метод последовательных аппроксимаций (МПА).

### **Степень разработанности темы диссертации.**

Начало развитию теории расчета конструкций в геометрически нелинейной постановке было положено в работах Л. Эйлера, Г. Кирхгофа, А. Сен-Венана, Ф.Клебша, И.Г. Бубнова, Теодора фон Кармана, А и Л Фепплей, Г.Хенки, С.Леви, Е. Бергмана. С.П. Тимошенко.

Расчету пластин в геометрически нелинейной постановке посвящены работы Андреева Л.Е., Вагнера Г., Варвака П. М., Воровича И.И., Григолюка Э.И., Даревского В.М., Зволинского Н.В., Олейникова Г.А., Панова Д.Ю., Подорожного А.А., Полубариновой-Кочиной П.Я., Постнова В.А., Ромашевского А.Ю., Свердлова И.А., Слепова Б.И., Соколова П.А, Стригунова В.М., Фаерберга И.И., Федергофера К., Феодосьева В.И.

Расчету оболочек в геометрически нелинейной постановке посвящены работы Власова В.З., Вольмира А.С., Галимова К.З., Ганеева М.С., Иванова С.П., Муштари Х.М., Новожилова В.В.

Развитию теории расчета конструкций, контактирующих с упругим основанием посвятили свои труды многие российские ученые: Андреев В.И., Болотин В.В., Власов В.З., Герсеванов Н.М., Горбунов-Посадов М.И., Демин И.И., Динник А.М., Жемочкин Б.Н., Ишкова А.Г., Киселев В.А., Клейн Г.К., Коренев Б.Г., Коренева Е.Б., Крылов А.Н., Кузнецов С.В., Леонтьев Н.Н., Пастернак П.Л., Саргсян А.Е., Симвулиди И.А., Сеницын А.П., Соболев Д.Н., Травуш В.И., Цейтлин А.И., Цытович Н.А. и др.

Исследования Акимова П.А., Белостоцкого А.М., Бурмана З.И., Вольмира А.С., Габбасова Р.Ф., Корнишина М.С, Мкртычева О.В., Постнова В.А., Резникова Р.А., Розина Л.А., Сахарова А.С., Смирнова А.Ф. и иных учёных внесли важный вклад в развитие численных методов при расчете конструкций с учетом больших прогибов.

**Целью диссертационной работы** является разработка методики, алгоритмов и программ для расчёта гибких прямоугольных пластин на статические нагрузки с применением разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА) без упругого основания и на упругом основании.

Для реализации поставленной цели были решены следующие **основные задачи**:

- выполнен обзор работ, посвященных расчету пластин и оболочек в геометрически нелинейной постановке.

- разработана методика, алгоритм и программа расчёта на ЭВМ прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА) без учета контакта с упругим основанием.

- разработана методика, алгоритм и программа расчёта на ЭВМ прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА) с учетом полного и частичного контакта с упругим основанием.

- выполнено сравнение полученных результатов с известными аналитическими и численными решениями.

**Объектом исследования** являются прямоугольные гибкие пластины, в том числе, взаимодействующие с упругим основанием.

**Предметом исследования** является напряженно-деформированное состояние гибких прямоугольных пластин под действием статических нагрузок без упругого основания и на упругом основании.

**Научная новизна работы** состоит в следующем:

- Разработана методика расчета прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке с использованием разностных уравнений МПА. Разработан алгоритм расчета гибких пластин и составлена программа для ЭВМ с использованием программного пакета MATLAB.

- Разработана методика, учитывающая влияние частичного или полного контакта с упругим основанием на НДС гибких пластин прямоугольного очертания. Разработан алгоритм расчета и составлена программа для ЭВМ.

- Получено решение новых задач по расчёту гибких прямоугольных пластин: с различными граничными условиями на действие разрывных нагрузок, с учётом неполного контакта с упругим основанием и на упругом основании с переменным коэффициентом отпора.

**Соответствие темы диссертации требованиям паспорта специальностей ВАК.** Диссертация выполнена в рамках специальности 2.1.9 — «Строительная механика» (Технические науки); п.2. Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета; п.4. Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях.

**Теоретическая и практическая значимость** работы заключается в разработке методики, алгоритмов и программ для расчёта на ЭВМ прямоугольных пластинок в геометрически нелинейной постановке с привлечением разностных уравнений МПА. Возможность учета работы гибкой пластины при неполном контакте с упругим основанием позволяет выполнять расчеты при прогнозировании влияния аварийных воздействий и проверять остаточный ресурс конструкции при известных параметрах аварийного воздействия. Под аварийным воздействием здесь следует понимать возможные карстовые провалы, подмывы грунта и т.п. Методика позволяет оценивать НДС при заданных, в том числе больших, осадках основания.

#### **Методология и методы исследований:**

В ходе проведения исследований использовались классические положения теории упругости, строительной механики, теории расчета пластин с учетом больших прогибов. Численная реализация построена на применении метода последовательных аппроксимаций (МПА), хорошо себя зарекомендовавшего при



расчете пластин и оболочек на действие разрывных нагрузок, на упругом основании.

**Достоверность** полученных результатов базируется на строгой математической постановке задач, на хорошем совпадении с известными ранее опубликованными результатами других авторов, на численном исследовании сходимости решения для всех решенных задач.

**Апробация результатов.** Результаты диссертационной работы были доложены на международных конференциях: 1 доклад на международной конференции «XXVIII R-P-S Seminar 2019» с 9 по 13 сентября 2019, Žilina, Slovakia, 2 доклада на III международной научно-технической конференции “Строительство и архитектура: теория и практика инновационного развития” (CAPID 2020) с 28 по 30 сентября 2020 в онлайн формате и 1 доклад на Первой Национальной конференции «Актуальные проблемы строительной отрасли и образования» 30 сентября 2020.

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликованы 3 статьи в журналах, входящих в перечень Scopus, одна статья в журнале, включенной в Перечень рецензируемых научных изданий и одна публикация в других научных журналах и изданиях. (Приложение А)

**Личный вклад автора:** заключается в том, что непосредственно автором была составлена методика, алгоритм и программы расчета гибких пластин на упругом основании и без упругого основания на базе разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА). Лично автором решены новые задачи по расчету гибких пластин без упругого основания с учетом различных краевых условий и действия разрывных нагрузок, и задачи по расчету гибких пластин на упругом основании, при неполном контакте с упругим основанием, с учетом контакте с основанием переменного коэффициента отпора.

**На защиту выносятся следующие положения:**

- Методика, алгоритмы и программы расчёта гибких пластин без упругого основания и на упругом основании на основе разностных уравнений последовательных аппроксимаций (МПА).

- Результаты решения новых задач по расчёту гибких пластин без упругого основания с учетом различных краевых условий и действия разрывных нагрузок.

- Результаты решения новых задач по расчету гибких пластин на упругом основании, при неполном контакте с упругим основанием, с учетом контакта с основанием переменной жесткости.

**Структура и объем работы.** Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Работа изложена на 150 страницах машинописного текста, включает 13 таблиц, 57 рисунков и фотографий и библиографический список из 222 наименований.

# ГЛАВА 1. ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

## 1.1. История вопроса расчета пластин в геометрически нелинейной постановке.

Основной задачей строительной механики является разработка методов расчета конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и колебания. Методов обеспечивающих безопасность, надежность сооружений и их экономичность.

При построении расчетных моделей, описывающих работу конструкций и сооружений, достаточно часто принимаются допущения, значительно упрощающие расчет (ограничения на величину допускаемых перемещений элементов конструкции, линейная зависимость между напряжениями и деформациями и т.д.). Это позволяет использовать простой математический аппарат. Но при этом стоит отметить, что расчет конструкций в линейной постановке приводит к увеличению их материалоемкости и экономической стоимости. А в некоторых случаях, поведение таких моделей сильно отличается от поведения реальных конструкций.

В строительной механике рассматривают три вида нелинейности: физическую, конструктивную и геометрическую. Под физической нелинейностью понимают отсутствие прямой зависимостями между напряжениями и деформациями. Такой вид нелинейной работы характерен для сооружений из железобетона. Конструктивная нелинейность связана с изменением расчетной схемы конструкции в процессе ее нагружения, что может быть вызвано взаимным смещением ее частей. Например, при изгибе балки, контактирующей с основанием работающей только на сжатие, могут возникнуть зоны отрыва конструкции от основания. Это повлечет изменение первоначальной расчетной схемы. В этом случае система называется конструктивно-нелинейной. Под

геометрической нелинейностью понимают нарушение линейной зависимости между нагрузкой и перемещением точек конструкции.

Попытаемся кратко проследить историю развития вопроса расчета пространственных конструкций в геометрически нелинейной постановке.

Прежде всего, приведем здесь классификацию пластин, приведенную Вольмиром А.С. «Пластинку называют жесткой, если можно без заметной погрешности считать срединный слой нейтральным или, иными словами, свободным от напряжений растяжения – сжатия... Гибкой называется пластинка при расчете которой в пределах упругости наряду с чисто изгибными напряжениями необходимо учитывать напряжения, равномерно распределенные по толщине пластинки и называемые цепными или мембранными напряжениями... Абсолютно гибкой пластинкой, или мембраной, называется пластинка, при исследовании упругой деформации которой можно пренебречь собственно изгибными напряжениями по сравнению с напряжениями в срединной поверхности» [12].

Впервые модель гибкой пластины была рассмотрена Эйлером при изучении поперечных колебаний в 1766г. Это, по сути, была еще не модель пластины, а системы перекрестных нитей. Теорию развил ученик Эйлера, Яков Бернулли. Он заменил нити балками и предложил дифференциальное уравнение, описывающее работу пластин при малых прогибах [77].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (1.1.1)$$

В силу описанного подхода в нем еще отсутствовала смешанная частная производная, отвечающая кручению пластинки. Как и в опубликованной в 1811 году работе французского математика Софи Жермен. Развивая вариационный подход Жозефа Луи Лагранжа применительно к упругим пластинам, использованный им для изучения одномерных конструкций, она допустила ошибку. Окончательный вид дифференциальному уравнению изогнутой поверхности придал сам Лагранж.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (1.1.2)$$

Дальнейшее развитие теории пластин получила в работах Густава Кирхгофа. Им были сформулированы основные положения теории жестких пластин. А также предпринята попытка построить теорию расчета с учетом прогибов, сравнимых с толщиной пластины. Но уравнения равновесия в законченном виде получены не были.

В 1881 году Адемар Жан-Клод Барре де Сен-Венан публикует перевод книги «Теория упругости» немецкого математика Фридриха Альфреда Клебша, снабжая его многочисленными комментариями. Среди которых, подробный анализ работ, посвященных исследованию пластин и дифференциальное уравнение изгиба пластины с учетом усилий в срединной поверхности. При этом нужно отметить, что усилия в срединной поверхности  $T_x$ ,  $T_{xy}$ ,  $T_y$ , по предположению Сен-Венана, не зависели от прогиба и должны были быть заданы.

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = f(x, y) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (1.1.3)$$

Подобно тому как строительство разветвленной сети железных дорог дало мощный импульс развитию мостостроения и в частности теории расчета ферменных конструкций, так нужды военно-морского флота по постройке крупных стальных кораблей способствовали развитию теории расчета гибких пластин. Иван Григорьевич Бубнов, стоявший у истоков создания российского подводного флота и бронированных, вооруженных тяжелой артиллерией, линейных кораблей, одним из первых применил теорию изгибаемых пластин при проектировании судовых конструкций. Он обратил внимание на то, что стальная обшивка кораблей испытывает прогибы сравнимые с толщиной самой обшивки, а возникающие в ней напряжения должны определяться с учетом не только изгиба, но и продольных усилий в срединной плоскости. В начале двадцатого века им был опубликован труд «Напряжения в обшивке судов от давления воды», который приобрел широкую известность не только у российских инженеров, но и был переведен на английский язык [116]. Иваном Григорьевичем было опубликовано точное решение для бесконечно длинной пластины за восемь лет до

того, как фон Карман впервые вывел общие уравнения для упругого поведения пластин при большом прогибе (в 1910 году).

В 1910 г. Теодор фон Карман получил уравнения пластинок в геометрически нелинейной постановке [205], записав их с учетом цилиндрической жесткости. А. Фоппл и Л. Фоппл [138] и Хенки [141] получили выражения для определения прогибов квадратной упругой мембраны, которые на самом деле являются решениями уравнений фон Кармана в частном случае, когда сопротивление пластины изгибу достаточно мало и им можно пренебречь.

Позднее решение для мембраны Хенки было добавлено Рамбергом, Макферсоном и Леви [184] к прогибу, полученному из теории линейного упругого изгиба для квадратной пластины, чтобы получить решение для пластин при большом прогибе.

Первые решения для больших прогибов прямоугольных пластин, отличные от бесконечно длинной пластины, были получены Уэй С. [211] в 1938 году. Энергетический метод Ритца был использован для получения приближенных решений для пластин, имеющих заданное соотношение сторон. Точное решение уравнения фон Кармана были даны Леви [161], [160] для случая квадратной пластины с использованием метода рядов Фурье. Грин и Саутвелл [140] использовали методы релаксации для определения поведения квадратной пластины, а Ван [208] применил метод конечных разностей для получения результатов для пластин с соотношением сторон  $2/3$  и  $1/2$ . Интересный метод был разработан Бергером [112], в котором анализ был упрощен за счет пренебрежения энергией деформации, обусловленной вторым инвариантом деформаций средней поверхности. Никакого физического объяснения гипотезе дано не было.

Начало тридцатых годов XX века ознаменовано бурным развитием авиационной промышленности. Металлическая обшивка фюзеляжа и плоскостей самолетов под действием воздушных потоков испытывает большие перемещения, сравнимые с толщиной панелей обшивки. К этому времени относятся работы советских ученых, таких как, Петр Маркович Варвак, Валерий Михайлович Даревский, Борис Иванович Слепов, по исследованию прямоугольных пластин в

геометрически нелинейной постановке методом Ритца. Дмитрий Юрьевич Панов предложил для решения подобных задач использовать метод Бубнова-Галеркина.

Значительное количество публикаций того времени посвящено работе сжатых прямоугольных пластин в закритической области. Это работы: П.А. Соколова, Г. Вагнера, Т. Кармана, П.Я. Полубариновой-Кочиной, Н.В. Зволинского, А.Ю. Ромашевского, И.А.Свердлова, В.М. Стригунова, Г.А. Олейникова, А.А. Подорожного, И.И. Фаерберга [12]. Известный российский и советский теоретик кораблестроения Петр Федорович Папкович в своей книге «Строительная механика корабля» подвел итог изысканиям, выполненным до 1940 года, в области расчета гибких пластин.

Профессор Ленинградского института инженеров гражданского воздушного флота Григорий Григорьевич Ростовцев обобщил теорию на случай анизотропных гибких пластин. Такой подход позволил рассматривать работу тонкого листа обшивки совместно с ребрами жесткости с учетом больших перемещений. Вопросы потери устойчивости плоской обшивки, взаимодействующей с подкрепляющим ребром изучались В.А. Постновым.

Вопросы учета усилий в срединной плоскости пластин с одновременным действием поперечной нагрузки рассматривались В.И. Петрашенем при проектировании затворов гидротехнических сооружений. Отдельно рассмотрены особенности работы конструкций после потери устойчивости.

Для решения задач по расчету прямоугольных пластин при сдвиге с учетом различных краевых условий С. Бергманом и И.И. Ааре применялись методы Ритца и Бубнова-Галеркина.

Исследованию гибких пластин круглого очертания посвятили работы Д.Ю. Панов, В.И. Феодосьев, К. Федергофер, Э.И. Григолюк, И.И. Ворович, Л.Е. Андреева.

Нельзя не упомянуть о развитии с середины двадцатого века такого направления, как расчет оболочек, в том числе с учетом больших перемещений. Укажем здесь на работы Х.М. Муштари[61,62], В.В. Новожилова [176], В.З. Власова [10]. В своей книге [10] Василий Захарович Власов приводит систему

дифференциальных уравнений, отвечающих большим прогибам оболочки. Уравнения записаны относительно функций напряжений и перемещений.

$$D\nabla^2\nabla^2w - \left( k_y \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2w}{\partial y^2} - q = 0, \quad (1.1.4)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2\nabla^2\Phi + k_y \frac{\partial^2w}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \frac{\partial^2w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2w}{\partial x\partial y} \right)^2 = 0. \quad (1.1.5)$$

Для интегрирования уравнений им был применен метод Бубнова-Галеркина, с использованием балочных фундаментальных функций, соответствующих основной частоте колебаний однопролетной балки.

Более подробная историческая справка и обзор работ, опубликованных до середины пятидесятих годов двадцатого века, по расчету пластин и оболочек с учетом больших прогибов приведены в монографии Арнольда Сергеевича Вольмира [12].

## 1.2. Современное состояние вопроса расчета пластин в геометрически нелинейной постановке.

Исследования решений уравнений фон Кармана имеют долгую историю, в течение которой было предложено и использовалось множество методов [105,113,120-122,124,128,204,206,207,219-222]. Например, Винсент [204] предложил метод возмущения с использованием приложенной нагрузки в качестве малого параметра для решения проблемы изгиба круглой тонкой пластины, подвергающейся действию равномерно распределенной нагрузки. Следует заметить, что такой метод не работает в случае, когда нагрузка становится достаточно большой. Чтобы преодолеть это ограничение, Цянь [121], Цянь и Йе [122,123] предложили процедуру, в которой в качестве параметра возмущения выбирается смещение центра пластины. Этот прием значительно расширил область применения метода возмущений. Однако, когда прогиб пластины увеличивается до определенного уровня, данный метод, использующий решение о линейном изгибе в качестве начального приближения, не позволяет получить корректное решение нелинейной задачи. Цянь [120] модифицировал метод возмущений, используя мембранное решение в качестве начального



решения для задачи изгиба пластин при чрезвычайно большом прогибе. При этом следует признать, что существует диапазон перемещений, в котором изгиб из плоскости и растяжение в плоскости почти одинаково важны, в результате чего две вышеупомянутые процедуры возмущения, разработанные Цянь [120,121] и Цянь и Йе [122], не применимы. Это так называемая «проблема перехода от пластины к мембране» для изгиба тонких пластин при большом прогибе, которая требовала дополнительных исследований в этой области на протяжении десятилетий с момента ее открытия Цянь и др. [124]. До 1990-х годов Чжэн, Чжоу и другие исследователи [219-222] не могли решить «проблему перехода» и доказать сходимость соответствующих решений с помощью специальной техники, называемой «итерационным методом интерполяции».

В статье [145] приблизительный анализ упругого поведения при большом прогибе жестко заделанных по краю, равномерно нагруженных прямоугольных пластин проводится с использованием метода возмущений. Полученные решения представлены в общей форме, которая позволяет прогнозировать поведение пластины, имеющей любое конкретное соотношение сторон. Приводится сравнение с известными опубликованными данными.

Ямаки [214] провел нелинейный анализ квадратных пластин с шарнирными опорами и заземленных по контуру. Он аппроксимировал решение, представив прогиб в виде тригонометрических выражений, а функцию напряжения - в виде ряда Фурье. Айенгар и Накви [150] также представили приближенное решение для заземленных и свободно опертых квадратных пластин, которое основано на двойной серии, состоящей из соответствующих балочных функций, удовлетворяющих граничным условиям. Борзи и Тернер [117] использовали минимизацию потенциальной энергии для аппроксимации большого прогиба прямоугольных пластин с помощью ряда косинусов Фурье. Метод возмущений был использован для аппроксимации решения для большого прогиба жестко заземленных по контуру прямоугольных пластин [145,165]. Для упрощения вычислений Ван и Эль-Шейх [209] реализовали ранее полученное последовательное решение в Майкрософт Эксель для решения свободно опертых и заземленных прямоугольных пластин. Окоди и др. [179] разработали приблизительное последовательное решение для большого прогиба свободно

опертой пластины, подверженной действию линейной нагрузки. Баккер и др. [111] использовали первую форму изгиба пластины для аппроксимации аналитического решения прямоугольных пластин. Раздольский [186] реализовал метод Леви в компьютерном алгоритме, способном учитывать произвольное количество гармонических функций для решения задачи изгиба прямоугольных пластин с прямым опорным элементом с произвольным соотношением сторон.

Энергетические методы предлагают более мощный инструмент для получения приближенных, но достаточно точных аналитических решений сложных краевых задач. В частности, метод Ритца имеет то преимущество, что он является гибким из-за его способности учитывать пробные функции, удовлетворяющие только геометрическим граничным условиям. Первые примеры использования энергетических методов можно найти в классической книге Тимошенко и Войновского-Кригера [78]. Дас и др. [130] использовали концепцию минимальной потенциальной энергии для получения приближенного решения для большого прогиба наклонной пластины с различными комбинациями заземленных и просто поддерживаемых краев. Дай и др. [129] применили метод Галеркина для решения проблемы большого прогиба прямолинейных тонких прямоугольных пластин, подвергнутых нагружению в плоскости и вне плоскости.

Методы аналитического решения, точные или приближенные зависят от формы пластин. Обширную литературу по этим методам можно найти у Chia [119].

Из вышеизложенного ясно, что предыдущая аналитическая работа по большому прогибу пластин не касалась свободных граничных условий. Численные методы, такие как метод конечных элементов, метод конечных полос, методы граничных элементов, метод дискретной сингулярной свертки и бессеточные методы [114,125,126,134,137,149,159,174,190,194,213] являются возможными инструментами-кандидатами для решения текущей проблемы. Однако все эти численные методы являются методами, зависящими от расчетной сетки, сетки элементов, и дают дискретные решения. Энергетические методы позволяют получить решения в функциональной форме. Наличие решения в функциональной форме является большим преимуществом, особенно в целях проектирования и оптимизации.

В статье [166] разработан автоматизированный метод Ритца для анализа тонких прямоугольных пластин, подвергающихся большому прогибу. Пробные функции, аппроксимирующие поперечные и плоскостные перемещения пластины, представлены простыми полиномами. Нелинейные алгебраические уравнения, составленные в результате применения концепции минимума потенциальной энергии пластины, представлены в матричной форме. Полученные уравнения матричной формы затем реализуются в коде Mathematica, позволяющим автоматизировать решение для произвольного числа пробных полиномов. Разработанный код протестирован на нескольких числовых примерах с прямоугольными пластинами различных пропорций и обладающих различными граничными условиями.

В монографии [51] рассмотрены основы нелинейной строительной механики. Кратко охарактеризованы и освещены современные методы расчета конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности. Особое внимание уделено случаям двойной нелинейности.

В [35] проведено исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин и оболочек при многократном упругопластическом нагружении. Методика построена с учетом разгрузки, образования вторичных пластических деформаций и сжимаемости материала.

Обзорная статья [60], посвященная развитию нелинейной теории расчета плит и оболочек, при этом основное внимание уделено работе железобетонных оболочек.

В [75] рассмотрена методика определения рациональной формы пологих оболочек на круглом плане. Задача решается в геометрически нелинейной постановке при различных видах нагружения и способах опирания.

В статье [69] предложен приближенный метод расчета нелинейных краевых задач. Метод основан на представлении искомого решения в виде главной и корректирующей частей, содержащих корректирующие параметры. Методика проиллюстрирована примерами расчета круглой пластины переменной толщины и квадратных пластин постоянной и переменной толщины с учетом больших прогибов.

Работа [70] является продолжением предыдущей статьи на класс более сложных нелинейных краевых задач. Приведены результаты расчета гибких кольцевых и прямоугольных пластин постоянной и переменной толщины при различных краевых условиях.

В последние годы авторы часто используют недавно разработанный вейвлет-метод [162-164,187] в качестве возможного для решения уравнений фон Кармана с различными граничными условиями. Этот метод является математически строгим и удобным в численной реализации при решении нелинейных задач строительной механики. В статье [212] с помощью вейвлет-метода исследуется задача изгиба круглой пластины с произвольно большим прогибом. Исследования показали, что метод хорошо справляется с «проблема перехода от пластины к мембране», о которой мы писали выше.

Модифицированная вейвлет-процедура Галеркина была предложена Чжан и др. [218], также было представлено решение проблемы большого прогиба квадратной пластины без опоры. Тот же метод был использован Ван и др. для решения круглых пластин [210]. Вейвлет-подход типа Койфлета также был разработан для решения текущей проблемы [76].

С другой стороны, для решения уравнений фон Кармана использовались многие численные методы, в том числе метод конечных элементов [128,177], метод граничных элементов [207] и метод конечных разностей [105] и др. Проблема заключается в том, что их числовая ошибка быстро увеличивается в соответствии с увеличением отклонения, что значительно затрудняет точное и эффективное решение «проблем перехода».

Работы по применению МКЭ к геометрически нелинейным задачам условно разделим на две группы. В первой группе упомянем лишь те статьи, в которых решаются задачи исключительно в геометрически нелинейной постановке, т.е с учетом больших перемещений [107-110,167,169,171,178,189,196,202,203]. Во второй упомянем работы, где учитываются физическая и геометрическая нелинейности [1,2,104,168].

Первую группу, представляющую интерес здесь, можно разделить на три подгруппы. Первая подгруппа включает те подходы, которые учитывают геометрическую нелинейность путем решения последовательности линейных

задач. Эти процедуры используются путем постепенного приложения нагрузки, использования матриц жесткости, которые учитывают влияние начальных сил, и обновления узловых координат [12,61,62,66,67]. Вторая подгруппа состоит из тех работ, в которых учитывают геометрическую нелинейность, формулируя набор нелинейных уравнений, определяющих поведение системы, а затем переходя к решению путем последовательных приближений [107,178]. Наконец, третья подгруппа освещает методики, которые используют нелинейные соотношения деформации-смещения для построения потенциальной энергии каждого из элементов и, следовательно, для всей конструкции, а затем получают численное решение путем поиска минимума полной потенциальной энергии [167,189].

В отношении геометрически нелинейных задач тонких пластин и оболочек остановимся на следующих. В [169] выведена матрица жесткости «начального напряжения» для тонкого треугольного элемента в плоском напряжении. Эта матрица жесткости для использования в линейно-инкрементном подходе была получена путем формулирования полной энергии деформации в терминах узловых смещений и применения первой теоремы Кастильяно. В формулировке использовались нелинейные соотношения деформации и смещения, причем нелинейность связана с членами вращения второй степени, которые обычно не учитываются в теории малых смещений.

Автор [110] вывел так называемую «геометрическую» жесткость треугольного элемента в плоском напряжении для использования в линейно-инкрементном подходе к задачам с большими перемещениями. Вывод был сделан с чисто геометрической точки зрения, в которой «геометрическая» жесткость объясняет изменение узловых сил, возникающих в инкрементальном шаге из-за того, что направление исходных сил, ранее находившихся в равновесии, было изменено. Аргирис не привел примеров применения этого подхода к проблемам с тонкими пластинами и оболочками большого смещения, но указал, что работа в этой области будет продолжаться.

Мюррей и Уилсон [171] решили задачу о большом прогибе тонкой пластины, используя треугольные плоские пластинчатые элементы. Стандартная матрица малых перемещений использовалась в сочетании с итерационной процедурой, основанной на достижении равновесного баланса. Процедура в равной степени

применима к задачам оболочек с большим смещением, поскольку исходная плоская пластина становится, по существу, изогнутой оболочкой, когда прогибы становятся больше, чем толщина.

Стриклин и др. [196] применили матричный метод перемещений к нелинейно-упругому анализу оболочек вращения, подвергнутых произвольному нагружению. Используемый метод линеаризовал нелинейные уравнения равновесия путем рассмотрения линейной и нелинейной частей энергии деформации и последующего применения нелинейных членов в качестве дополнительных обобщенных сил. Полученные уравнения равновесия решались одним из трех методов: методом увеличения нагрузки, итерацией или их комбинацией. Нелинейные члены, являющиеся функциями обобщенных перемещений, оценивались на основе значений координат при предыдущем приращении нагрузки или значений, полученных во время предыдущей итерации. Отмечено хорошее согласие с экспериментальными результатами.

Альцгеймер и Дэвис [107] применили метод последовательных приближений к нелинейному несимметричному изгибу тонкой кольцевой пластины. Нелинейные уравнения фон Кармана для тонкой пластины решались методом итераций с использованием решения линейной теории в качестве первого приближения. Результаты расчета дают хорошее приближение к экспериментальным данным.

В [189] использовались нелинейные соотношения деформация-перемещение в потенциальной энергии для прямоугольных пластин с большими прогибами и дискретных элементов цилиндрической оболочки. Полная энергия для всей конструкции формулировалась с учетом геометрических нелинейностей в соотношениях деформация-перемещение. Приближенное решение было получено численно путем прямой минимизации этой полной потенциальной энергии. Основным ограничением метода является то, что повороты деформированной конфигурации относительно недеформированной конструкции должны быть небольшими.

В [101] рассмотрено деформирование гибкой струны под действием поперечной нагрузки. Построен алгоритм решения нелинейной задачи на базе метода конечных элементов.

В работе [32] представлены результаты исследования деформирования пластин и оболочек со сложным контуром и ступенчатым изменением жесткости в геометрически нелинейной постановке. Решения получены с привлечением метода граничных элементов (МГЭ).

В работе [33] продемонстрировано применение метода граничных элементов к определению напряженно-деформированного состояния гибких пластин и пологих оболочек в геометрически нелинейной постановке, контактирующих с упругим основанием. Приведены примеры расчета трапециевидной и круглой пластин и сферической оболочки.

В [5] первой части монографии предложено развитие математических методов расчета гибких пластин и пологих оболочек в геометрически нелинейной постановке с учетом переменной жесткости и сложного очертания. Во второй части дано решение контактных задач гибких пластин и пологих оболочек со штампами. При решении задач преимущественно использован МГЭ.

Метод граничных элементов (МГЭ) был разработан для обработки больших прогибов плит Камия и Саваки [154], Танака [109], Йе и Лю [216], Кацикадклис и Калливокас [158], Кацикаделис и Нерантзаки [157].

Метод граничных элементов (МГЭ) использовался для решения задач с большим прогибом в [153,170,195,200].

Уже в 1948 году была предпринята попытка использования метода конечных разностей к расчету пластин с учетом больших прогибов [208].

В статье [46] приведен алгоритм расчета пластин и оболочек из нелинейно упругого материала. Разработанная программа позволяет вести расчет как в геометрически нелинейной постановке так и в физически нелинейной постановке, а также при совместном учете этих факторов.

В работе [43] опубликованы результаты расчета прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке. В качестве краевых условий рассмотрены шарнирное опирание и жесткая заделка со свободно смещающимися краями, в качестве нагрузок - равномерно распределенные по площади и локальные. Решение получено методом конечных разностей.

Монография [48] посвящена приложениям нелинейной теории гибких пластин и пологих оболочек и методам решения задач в нелинейной постановке. При этом наиболее перспективными методами автор считает метод конечных разностей и метод коллокаций. «На основании опыта применения перечисленных выше методов к решению рассмотренных задач автор склонен отдать предпочтение методу конечных разностей, так как он при наличии современных вычислительных средств позволяет получить максимум результатов с наименьшими затратами подготовительного времени».

В книге [47] приведены результаты решения геометрически нелинейных задач поперечного изгиба гибких пластин и панелей. Рассмотрена работа круглых и прямоугольных пластин постоянной толщины, пологих сферических и прямоугольных в плане панелей.

В [80] предложена модель трехслойной панели из ортотропных разносопротивляющихся материалов, работающая на поперечный изгиб с учетом больших прогибов. Линеаризованная система разрешающих дифференциальных уравнений, записанная в конечных разностях, решается в два этапа. На первом этапе прогибы считаются малыми и задача решается в физически нелинейной постановке по методу упругих решений А.А. Илюшина. На втором этапе с учетом нелинейностей двух видов по двухшаговому методу последовательных возмущений параметров В.В. Петрова.

В работе [36] предложена методика расчета гибких ортотропных оболочек и пластин переменной толщины при продольно-поперечном нагружении. Решение получено с помощью матричной формы метода конечных разностей.

В статье [30] предложена методика расчета гибких круглых пластин в нелинейной постановке с привлечением обобщенных уравнений МКР.

В [37-39] Ивановым С.П. был применен вариационный метод В.З. Власова к решению нелинейных пластин и оболочек.

### **1.3. Методы решения нелинейных задач на упругом основании**

Прогноз работы сооружений, с учетом взаимодействия с грунтовым массивом, до сих пор является очень сложной задачей. Основной вопрос при



составлении математической модели грунтового массива заключается в том, как описать взаимосвязь между осадками грунтового основания и возникающим реактивным давлением со стороны грунта. Предложено достаточно много моделей, описывающих работу основания, но ни одну из них нельзя считать универсальной, подходящей для всех случаев. Краткий обзор моделей можно найти в [11]. Более полный обзор приведен в [133].

Один из популярных методов моделирования взаимодействия грунта и конструкции берет свое начало в работе Винклера в 1867 году, где предполагается, что существует прямая зависимость осадки грунта  $w$  от действующей нагрузки  $p$ , действующей в данной точке:

$$p = kw \quad (1.3.1)$$

Константу пропорциональности  $k$  обычно называют модулем отпора земляного полотна или коэффициентом постели. Эта модель была впервые использована для анализа прогибов и возникающих напряжений в железнодорожных путях. За прошедшие годы она была применена к множеству различных задач взаимодействия грунта и конструкции и известна как модель Винклера.

$$D\nabla^4 w = q - kw. \quad (1.3.2)$$

При этом отметим, что в 1798 г. Российским академиком Николаем Фуссом была высказана гипотеза о прямой пропорциональности между действующей нагрузкой и осадкой грунта, но не к расчету фундаментов, а для определения глубины дорожной колеи. А в 1888 году вышеуказанная гипотеза была использована в работе немецкого инженера Циммермана. Поэтому в некоторых источниках модель носит название Фусса-Винклера-Циммермана, но чаще всего – модель Винклера.

Данную модель основания можно представить, как набор несвязанных между собой пружин заданной жесткости. Предполагается, что работать (деформироваться под действием приложенной нагрузки) будут только те пружины, которые расположены непосредственно под объектом (балка, плита) и контактируют с ним. Такое поведение основания противоречит натурным наблюдениям. Давно отмечено, что в реальных условиях происходят осадки грунта не только под пятном контакта, но и в зонах прилегающих к нему. Поскольку в

каждой точке контакта основание характеризуется только одной величиной (жесткостью), такое основание часто называют однопараметрическим. Отсутствие взаимодействия между соседними точками (пружинами) является основным недостатком винклеровской модели.

Впоследствии, многие исследователи, осознавая проблемы, присущие модели Винклера, попытались сделать модель более реалистичной, допустив некоторую форму взаимодействия между «пружинными» элементами, которые представляют собой почвенный континуум.

Филоненко-Бородич (1940) [98] разработал модель, которая улучшила модель Винклера. Если по-прежнему упругий слой представлять набором пружин, то в предложенной модели верхние концы пружин объединены с эластичной мембраной, растянутой до постоянного напряжения  $T$ . Модуль реакции основания определяется выражением:

$$p = kw - T\nabla^2 w \quad (1.3.3)$$

где  $\nabla^2$  - оператор Лапласа. В работу основания включаются области, граничащие с пятном опирания конструкции, но практических рекомендаций для вычисления  $k$  и  $T$  того или иного типа грунта нет.

Хетеньи (1946 и 1950) [80] предложил модель взаимодействия между «пружинами» в винклеровском основании, вставив дополнительную пластину с жесткостью на изгиб,  $D^*$ . Согласно этой модели, модуль реакции определяется выражением:

$$p = kw + D^* \nabla^2 \nabla^2 w \quad (1.3.4)$$

однако метод определения значений  $k$  и  $D^*$  не предусмотрен.

Пастернак (1954) [68] усовершенствовал модель Винклера, «соединив» концы «пружин» с пластиной или «слоем сдвига», состоящим из несжимаемых вертикальных элементов, которые могут деформироваться только за счет бокового сдвига. Согласно этой модели модуль реакции основания определяется выражением:

$$p = kw - G\nabla^2 w \quad (1.3.5)$$

Несмотря на то, что « $G$ » представляет модуль сдвига упругого основания, не предусмотрено единого метода для определения  $k$ .

Василий Захарович Власов и Николай Николаевич Леонтьев (1966) [11] использовали новый теоретический подход для разработки двухпараметрической модели пластин. Модель Власова и Леонтьева (широко известная как «модель Власова») предусматривала деформации в почвенном континууме и привела к уравнению области:

$$D\nabla^4 w = q + 2t\nabla^2 w - kw \quad (1.3.6)$$

где  $t$  - параметр сдвига грунта

Это уравнение, которое учитывает сдвиговые взаимодействия в фундаменте и конструкции, было разработано с использованием вариационных принципов. Кроме того, Власов и Леонтьев ввели еще один параметр, который они определили как  $\gamma$ , чтобы характеризовать вертикальный профиль деформации в грунтовом континууме. Позитивная сила подхода Власова и Леонтьева заключается в полном устранении необходимости эмпирически определять значения модуля реакции земляного полотна  $k$  или даже параметра сдвига  $t$ , поскольку их значения могут быть вычислены при условии определения значения  $\gamma$ . Недостаток этой модели состоит в том, что требуется оценка параметра  $\gamma$ . Механизм же для вычисления значения  $\gamma$  не разработан.

Ян (1972) [215] рассмотрел работу прямоугольных пластин на упругом основании с использованием двухпараметрической модели Власова и Леонтьева. Подобно Власову и Леонтьеву, Ян не предоставил средства для расчета важного параметра профиля вертикальной деформации  $\gamma$ . Он использовал те же оценочные значения  $\gamma$  и предположил полубесконечный континуум, в котором глубина грунта равна бесконечно, как это сделали Власов и Леонтьев, а затем вычислили значения других параметров численно. Ни один из этих исследователей не решил задачу анализа плит на упругом основании с конечными слоями грунта.

Признавая важность  $\gamma$  в управлении распределением напряжений в основании, Джонс и Ксенофонтос (1977) [152], используя вариационные принципы, усовершенствовали модель Власова, разработав выражение для вычисления  $\gamma$ .

Вопросы, связанные с различными аспектами линейных оснований в литературе, также можно найти в работах Сивалек [127], Холл and Лю [144], Пан и др. [180], Шен [191,192], Борисович и др. [118].

Уравнения фон Кармана могут описывать большие прогибы плит на упругом основании, если к ним добавить член реакции упругого основания. Решение этой задачи становится значительно более трудным даже в простейшем случае реакций основания винклеровского типа.

С другой стороны, использование балок и плит на упругом основании в последнее время получило широкое распространение в технике. Следовательно, важно уточнить влияние отпора основания на поведение гибких балок и плит в практических конструкциях. Хотя большие прогибы на упругом основании уже анализировались многими исследователями, в большинстве этих работ используется гипотеза Винклера [103,115,131,132,135,139,146-148,151,155,181,185, 188,193,197].

В работе [33] решение задач расчета гибких пологих оболочек и гибких пластин, опирающихся на винклеровское основание, получено с привлечением МГЭ.

В статье [151] исследуется геометрическое нелинейное поведение тонких осесимметричных круглых пластин на на винклеровском основании с использованием метода граничных интегральных уравнений. Граничное интегральное уравнение тонких пластин и фундаментальное решение бигармонического уравнения используются как для анализа изгиба, так и для анализа плоских напряжений.

В статье [197] на основе метода Ритца найдены аналитические решения для пластины, опирающейся на неоднородное упругое основание. Основное уравнение построено с использованием классической теории пластин и гипотезы Винклера. Считается, что жесткость фундамента линейна в плоскости плиты.

В статье [103] безэлементный метод Галеркина используется для анализа изгиба тонких пластин на упругом основании Винклера с линейно изменяющейся толщиной при общих нагрузках и граничных условиях. Безэлементные методы

Галеркина (Element Free Galerkin method) (EFG) - это методы решения уравнений в частных производных с движущимися интерполянтами наименьших квадратов. Методы EFG требуют только узловых данных; подключение элементов не требуется. Однако использование множителей Лагранжа увеличивает сложность решения линейных алгебраических уравнений.

В статье [135] представлен анализ осесимметричного поведения на большой прогиб тонких кольцевых пластин с цилиндрической ортотропностью, опирающихся на кольцевое упругое основание и подверженных равномерно распределенным нагрузкам. Рассмотрены статические нагрузки, приложенные к заземленным и свободно опертым кольцевым пластинам. Естественные граничные условия, используемые в отверстиях, согласуются с условиями, полученными из принципа Гамильтона. Основные уравнения типа фон Кармана решаются с использованием метода коллокации ортогональных точек в сочетании с Newmark- $\beta$  схема.

Статическое поведение при большом прогибе изотропной круглой пластины на основании Винклера было изучено Синха [193] и Датта [132] с использованием приближения Бергера.

Болтон [115] применил метод Галеркина для статического анализа большого прогиба изотропной пластины на основании Винклера.

Колебания пластин с большой амплитудой на основании Винклера были проанализированы Гаджендрой [139] с использованием приближения Бергера и техники Галеркина.

В статье [156] для анализа большого прогиба тонких упругих пластин, покоящихся на упругом основании Винклера использован метод граничных элементов.

Анализ работы изотропной круглой пластины с учетом больших прогибов на основании Пастернака для случая ступенчатых нагрузок был представлен Натом [172] с использованием ряда Чебышева и техники Хуболта.

Поведение ортотропной кольцевой пластины на основании Винклера-Пастернака было изучено Натом и Джайном [173] с использованием метода Губолта.

В статье [199] предлагается метод расчета прямоугольной пластины на упругом основании в геометрически нелинейной постановке методом граничных интегральных уравнений. В качестве упругого основания принята двухпараметрическая модель Пастернака. В ходе анализа основное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для пластины преобразуется в обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение с использованием метода Кантровича. Полученное нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка проанализировано методом граничных элементов.

В статье [182] представлен расчет пластины, опирающейся на различные линейные и нелинейные основания, при различных граничных условиях и при действии различных нагрузок. Решение получено с помощью нового метода вейвлет-гомотопии.

Дюмир и Бхаскар [136] получили приближенное аналитическое решение о большом прогибе пластины, подверженной статическим нагрузкам, на линейных моделях Винклера и Пастернака с помощью метода коллокации.

Ал-Толая и Аль-Гахтани [106] систематически классифицировали численные решения для большого прогиба плит на нелинейном однородном основании.

#### **1.4. Метод последовательных аппроксимаций (МПА).**

При анализе работ известных советских ученых А.Ф. Смирнова [73], А.В. Александрова [4], Б.Я. Лащеникова [50] Радеком Фатыховичем Габбасовым было отмечено, что последовательное применение матриц дифференцирования или матриц интегрирования равносильно тому, что искомая функция и ее производные последовательно аппроксимируются (приближенно заменяются) одной и той же аппроксимирующей заданной функцией. Методика расчета, базирующаяся на использовании матриц интегрирования и дифференцирования, построенных на базе полинов Лагранжа, показала высокую точность даже на достаточно редких сетках. Однако при сгущении сетки точность расчетов

снижается. Это обусловлено «жесткостью» аппроксимирующих функций. Габбасовым Р.Ф. было предложено при построении указанных матриц использовать кусочно-полиномиальные функции или сплайны, что позволило в значительной мере устранить указанный недостаток. Кроме того это позволило эффективно, без дополнительного сгущения сетки, применять метод при решении разрывных задач механики, при наличии конечных разрывов в функциях нагрузки, жесткости конструкции, сплошности конструкции (наличие отверстий, шарниров, щелей и т.п.), скачкообразного изменения параметров упругого основания. Метод получил название – метод последовательных аппроксимаций (МПА). Первоначально метод был реализован в интегральной и дифференциальной форме, посредством применения матриц интегрирования и дифференцирования к решению задач строительной механики. Достаточно скоро выяснилось, что для решения практических задач более удобна разностная модификация метода, предполагающая использование уравнений, близких по своей структуре к уравнениям метода конечных разностей (МКР). При этом разностные уравнения МПА обладают рядом преимуществ. Они позволяют: учитывать вышеуказанные разрывы без специального сгущения сетки, отказаться от законтурных точек при учете краевых условий, получать результаты повышенной точности даже на достаточно разреженных расчетных сетках.

Вместе с тем, Радеком Фатыховичем была предложена модификация классических уравнений МКР. Эти уравнения учитывают разрывы искомой функции, ее производной и правой части исходного дифференциального уравнения. При отсутствии разрывов они полностью совпадают по записи с уравнениями МКР. Поэтому их можно считать обобщенными уравнениями МКР. Они имеют более простую структуру по сравнению с разностными уравнениями МПА, что облегчает их использование при расчетах, но уступают последним в точности.

Эффективность применения МПА была продемонстрирована как в работах самого Р.Ф. Габбасова [9,13-31,34,44,45,53-56,58,59,63-65,69,71,74,81-93,95-97,99, 100,102,175,183] , так и в работах его учеников и последователей при расчете

балок, плит и оболочек на действие статических нагрузок, на устойчивость и колебания, при расчете конструкций на упругом основании. Остановимся на некоторых из них.

В работе [54] построена численная методика расчета ребристых плит на действие статических нагрузок, с привлечением обобщенных уравнений МКР.

В [58] рассмотрена работа пластин переменной жесткости на изгиб, получено численное решение задачи по расчету пластин постоянной толщины с учетом влияния продольных сил на изгибные деформации, разработан алгоритм решения плоской задачи теории упругости в перемещениях при различных краевых условиях на основе разностной формы МПА, представлена методика расчета пластинчатых систем (призматических оболочек).

В [53] предложена методика расчета пластин средней толщины на изгиб. Предусмотрена возможность учета произвольных граничных условий. Разработана методика учета сдвиговых деформаций.

В [65] разработана численная методика расчета балок, плит и пологих оболочек в динамической постановке. Получены зависимости прогиба и изгибающего момента для балок (без учета диссипативных сил) при действии распределенного импульса. Предложена методика расчета плит и оболочек на мгновенный импульс и кратковременную нагрузку. Решение построено на базе разностной формы МПА.

Автор [71] посвятил работу численному анализу колебаний мембран, пластин и стержней с учетом действия продольных сил в срединной плоскости. В работе использована разностная форма МПА.

В [59] рассмотрен расчет балок и плит переменной жесткости на действие статических и динамических нагрузок. Решения получены с использованием разностных уравнений МПА и обобщенных уравнений МКР.

Автором [99] разработана методика расчета пластин средней толщины на действие разрывных статических и динамических нагрузок на базе обобщенных уравнений МКР.



В [9] разработана численная методика расчета пологих оболочек в динамической постановке. Алгоритм расчета построен на базе обобщенных уравнений МКР. Приведены результаты решения задачи при действии локальной гармонической нагрузки

В [55] с использованием обобщенных уравнений МКР рассмотрены собственные колебания круглых пластин и вынужденные колебания при действии гармонической нагрузки. Колебательный процесс рассмотрен без учета диссипативных сил.

В [44] разработана численная методика расчета изгибаемых плит переменной жесткости на упругом основании с привлечением разностных уравнений МПА.

В [13] рассмотрены вопросы оптимизации стержневых конструкций, контактирующих с упругим основанием.

Работа [94] посвящена расчету сжато-изогнутых балок и плит при неполном контакте с упругим основанием. Под неполным контактом подразумевается наличие участков под подошвой конструкции, где контакт отсутствует. В качестве упругого основания рассматривается модель Винклера. В работе использована разностная форма МПА.

Работа [45] является развитием вышеуказанной на область ортотропных пластин.

[74] посвящена построению численной методики расчета ортотропных пластин, контактирующих с упругим основанием, на действие статических нагрузок.

В [63] разработана численная методика расчета пологих оболочек на действие статических нагрузок по МПА в смешанной форме и в перемещениях. Решена обратная задача строительной механики в численной форме.

Построение методики расчета пологих, сферических, цилиндрических оболочек на базе обобщенных уравнений МКР продемонстрировано в [64].

В [56] построена методика расчета прямоугольных пластин на устойчивость разрывных продольных нагрузок в срединной плоскости.

Численный метод расчета арок в упругой стадии и в условиях предельного равновесия разработан в [100].

В [102] разработаны численные методы расчета слабосклонных и призматических оболочек постоянной и переменной толщины на действие статических нагрузок в линейной и нелинейной постановке с применением разностных уравнений МПА.

Вопросы анализа работы составных балок и пластин по теории А.Р. Ржаницына в линейной постановке и с учетом геометрической нелинейности; на упругом основании, при неполном контакте или без учета основания; на действие разрывных статических нагрузок; на колебания и устойчивость первого и второго рода; в упрощенной постановке рассмотрены в [90] Решения построены на базе разностной формы МПА.

Кроме последних указанных двух работ, в которых разностные уравнения МПА применялись к расчету конструкций в геометрически нелинейной постановке, приведем здесь две работы, посвященные расчету именно гибких пластин. В [90] предложен алгоритм расчета круглых пластин в геометрически нелинейной постановке с привлечением обобщенных уравнений МКР. Численная методика проиллюстрирована примером расчета на грубой расчетной сетке с привлечением простейших вычислительных средств. Авторы статьи ставили перед собой исключительно методическую цель, а именно заявить о предлагаемой методике расчета. Погрешность полученных результатов по сравнению с аналитическим решением составляет порядка 10 процентов. Та же идея, и с подобной степенью проработки, применительно к прямоугольной пластинке, изгибаемой по цилиндрической поверхности изложена в [14].

### **1.5. Выводы по главе 1**

Вольмир А.С., оценивая преимущества применения метода конечных разностей к решению уравнений фон Кармана, описывающих работу гибких пластин, в [12] на стр.65 указывает: «Отметим возможность приведения системы уравнений (60') - (61') к уравнениям в конечных разностях, после чего снова может быть применен метод последовательных приближений. Преимущество

описанных здесь методов по отношению к вариационным методам состоит в том, что они не связаны с интуитивным подбором аппроксимирующих функций. Правда, первые приближения обычно не дают существенных поправок к энергетическим решениям, выполнение же последующих приближений затруднено из-за громоздкости выкладок. Применение вычислительных машин должно облегчить получение достаточно точных результатов».

Выше мы указали известные нам работы, в которых к расчету гибких пластин привлекался метод конечных разностей. За исключением двух работ профессора Габбасова Р.Ф. не было предпринято попыток построения численных методик расчета пластин в геометрически нелинейной постановке с привлечением современных эффективных разностных методов. В работах Радека Фатыховича, на базе обобщенных уравнений МКР, изложена идея и получены первоначальные, оценочные результаты для двух простых тестовых примеров. Требуется дальнейшая разработка темы: совершенствование алгоритма для возможности учета различных краевых условий, различных видов нагрузки, включая разрывные нагрузки, составление программы для ЭВМ, апробация методики на известных тестовых примерах, решение новых задач, публикация и обсуждение материалов. Все это может быть выполнено в рамках отдельной исследовательской работы.

В рамках настоящей работы мы ставим цель разработать численный алгоритм по расчету прямоугольных пластин на действие статических нагрузок в геометрически нелинейной постановке, в том числе с учетом контакта с упругим основанием, с привлечением разностных уравнений МПА. Метод последовательных аппроксимаций, показавший при решении целого ряда задач расчета стержней, пластин и оболочек высокую эффективность, ранее для изучения работы гибких пластин не применялся.

## ГЛАВА 2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН НА СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА БАЗЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ МПА.

### 2.1. Разрешающие дифференциальные уравнения гибких пластинок и переход к безразмерным величинам.

Запишем систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок, известных как уравнения фон Кармана, по [12]:

$$\frac{D}{H} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{H} q; \quad (2.1.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (2.1.2)$$

где  $H$  – толщина пластинки;

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)} \text{ – цилиндрическая жёсткость;}$$

$\mu$  – коэффициент Пуассона;

$q$  – интенсивность поперечной нагрузки, распределённой по заданному закону;

$E$  – модуль упругости материала;

$x, y$  – координаты.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$\Phi$  – функция напряжений;

$w$  – прогиб (вертикальное перемещение по оси  $z$ );

Применяем систему дифференциальных уравнений (2.1.1) и (2.1.2) при расчете гибких пластинок. Компоненты  $w$  и  $\Phi$  представляют собой основные неизвестные системы.

Через  $w$  определим изгибающие моменты в направлении координаты  $x$ ,  $y$ ; крутящий момент и поперечные усилия по следующим формулам [12]:

Изгибающие моменты по осям  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Крутящий момент:

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (2.1.4)$$

Поперечные усилия по осям  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Запишем выражения для определения значений поперечных сил на свободном краю по [78]:

$$\begin{aligned} V_x &= \left( Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ V_y &= \left( Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned}$$

Для удобства численного решения задач гибких пластин приведём систему разрешающих уравнений (2.1.1) и (2.1.2) к безразмерному виду, для чего

умножаем (2.1.1) на  $\frac{a^3 H}{D}$  :

$$\frac{D}{H} \nabla^2 \nabla^2 w \frac{a^3 H}{D} = \frac{a^3 H}{D} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{a^3 H}{D} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{a^3 H}{D} 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{a^3 H}{D} \frac{1}{H} q. \quad (2.1.6)$$

Введем обозначения:

$$\psi = \frac{\Phi H}{D}; \quad \bar{w} = \frac{w}{a}; \quad \xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a}; \quad (2.1.7)$$

$$\bar{\nabla}^2 = a^2 \nabla^2; \quad \bar{q} = \frac{qa^3}{D}, \quad (2.1.8)$$

тогда (2.1.6) примет вид:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{q}. \quad (2.1.9)$$

Умножим (2.1.2) на  $a^2$  и запишем с учетом (2.1.7) и (2.1.8). Тогда (2.1.2) примет вид:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \psi = -k \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right), \quad (2.1.10)$$

где  $k = \frac{EHa^2}{D}$ .

Обозначим:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{w} = -m; \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = -m; \quad (2.1.11)$$

$$\bar{\nabla}^2 \psi = -f; \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f; \quad (2.1.12)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} = l; \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = n; \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} = t; \quad (2.1.13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = b; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = c; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = d. \quad (2.1.14)$$

Уравнение (2.1.9) запишем так:

$$\bar{\nabla}^2 m = -(bn + cl - 2dt) - \bar{q}. \quad (2.1.15)$$

Аналогично запишем (2.1.10):

$$\bar{\nabla}^2 f = k(nl - t^2). \quad (2.1.16)$$

Обозначим обобщенный изгибающий момент  $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}$ , тогда

$$M = \frac{D \cdot m}{a}. \quad (2.1.17)$$

Формулы (2.1.3)-(2.1.5) в безразмерном виде запишутся так:

$$m_\xi = - \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right); \quad (2.1.18)$$

$$m_\eta = - \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \right).$$

$$m_{\xi\eta} = -(1-\mu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta}; \quad (2.1.19)$$

$$q_\xi = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right); \quad (2.1.20)$$

$$q_\eta = - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right),$$

здесь:

$$M_x = \frac{m_\xi D}{a}; \quad M_y = \frac{m_\eta D}{a}; \quad M_{xy} = \frac{m_{\xi\eta} D}{a} \quad \text{или}$$

$$m_\xi = \frac{M_x a}{D}; \quad m_\eta = \frac{M_y a}{D}; \quad m_{\xi\eta} = \frac{M_{xy} a}{D}; \quad (2.1.21)$$

$$Q_x = \frac{q_\xi D}{a^2}; \quad Q_y = \frac{q_\eta D}{a^2}. \quad \text{или} \quad q_\xi = \frac{Q_x a^2}{D}; \quad q_\eta = \frac{Q_y a^2}{D}.$$

Таким образом, систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластин в безразмерном виде образуют уравнения (2.1.9) и (2.1.10). Выражения (2.1.18) – (2.1.20) позволяют определить безразмерные значения внутренних усилий.

## 2.2. Алгоритм расчета

Введем обозначения, упрощающие запись правой части уравнений (2.1.15) и (2.1.16):

$$\lambda = cl + bn - 2dt; \quad (2.2.1)$$

$$\alpha = k(t^2 - nl); \quad (2.2.2)$$

$$g = \lambda + \bar{q} \quad (2.2.3)$$

Теперь систему из двух дифференциальных уравнений четвертого порядка (2.1.9) и (2.1.10) представим как систему четырёх дифференциальных уравнений второго порядка. Для этого уравнение (2.1.15) запишем с учетом (2.2.1) и (2.2.3), уравнение (2.1.16) – с учетом (2.2.2), а уравнения (2.1.11) и (2.1.12) приведем здесь без изменений. Получим:

:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -g; \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = -m; \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = -\alpha; \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f; \quad (2.2.7)$$

Алгоритм решения системы уравнений (2.2.4) – (2.2.7) следующий. На первом этапе решаем задачу в линейной постановке. Из решения (2.2.4) при  $\lambda=0$  и, как следствие из (2.2.3),  $g = \bar{q}$ , найдем значения функции  $m$ . Подставляя найденные  $m$  в (2.2.5) вычислим значения  $\bar{w}$ . По известным значениям прогибов численно определим производные, т.е. используя (2.1.13) найдем значения  $l$ ,  $n$  и  $t$ . По (2.2.2) вычислим  $\alpha$ . Определив правую часть, решаем уравнение (2.2.6). Из его решения найдем значения функции  $f$ . Это позволит перейти к решению (2.2.7) и определить  $\psi$ . Вычислив по (2.1.14) вторые частные производные от  $\psi$ , найдем  $b$ ,



$c$  и  $d$ . Определив по (2.2.1) параметр  $\lambda$ , по (2.2.3) можем вычислить уточненное значение  $g$ , являющегося правой частью уравнения (2.2.4). Таким образом цикл замкнулся. Начиная со второй итерации задача решается в нелинейной постановке. Поиск численного решения продолжается до достижения наперед заданной точности.

На рисунке 2.1 приведена блок-схема, иллюстрирующая предлагаемый алгоритм расчета:

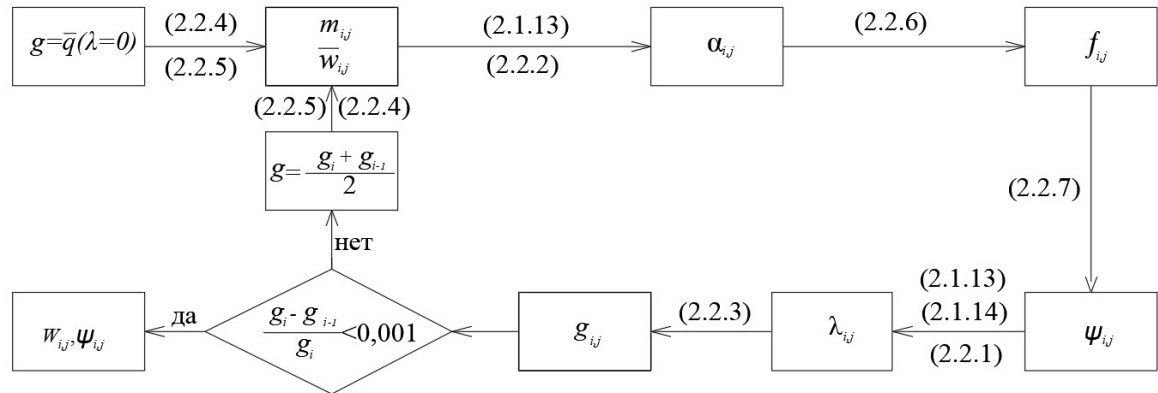


Рисунок 2.1 – Блок-схема решения гибких пластин на статические нагрузки.

### 2.3. Аппроксимация системы дифференциальных уравнений разностными уравнениями МПА.

В [169] приведена разностная аппроксимация дифференциального уравнения в частных производных второго порядка общего вида:

$$\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi^2} + \delta_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi} + \beta_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \eta^2} \right) = -p. \quad (2.3.1)$$

Дифференциальные уравнения (2.2.4) – (2.2.7) являются частными случаями (2.3.1). Поэтому используем (2.5.13) работы [28], являющегося разностным аналогом дифференциального уравнения (2.3.1), для аппроксимаций дифференциальных уравнений типа (2.2.4) – (2.2.7).

Прямоугольную область интегрирования  $\Omega(\xi, \eta)$  разделим на подобласти (I-IV) (Рисунок 2.2), т.е на отдельные элементы, которые имеют общую точку  $i, j$ .

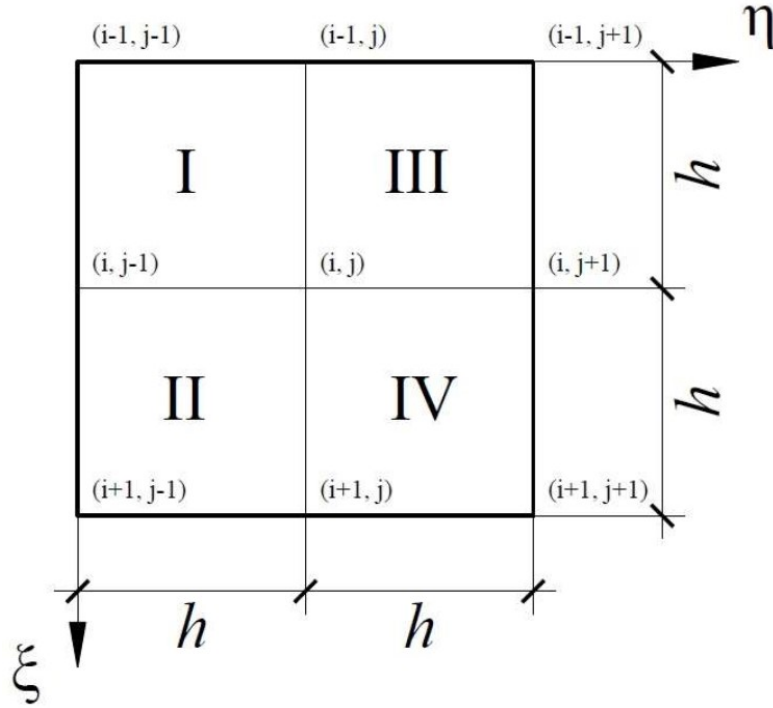


Рисунок 2.2 - Фрагмент расчётной сетки в регулярной точке  $i, j$ .

Для аппроксимации дифференциальных уравнений типа (2.2.4) разностными уравнениями МПА во внутренней точке  $i, j$ , следует принять в (2.3.1)  $\alpha = \gamma = 1, \delta = \beta = \sigma = 0, \alpha_i = \gamma_i = \delta_i = \beta_i = \sigma_i = 0$  с заменой  $\omega$  на  $m$ ,  $p$  на  $g$ . Считаем, что искомые функции являются непрерывными в пределах элемента. На границах элемента могут притерпевать конечный разрыв сами искомые функции, их первые производные и правые части исходных дифференциальных уравнений. Примем квадратную сетку  $\tau_1 = \tau_2 = h_1 = h_2 = h$ , и запишем аппроксимацию дифференциального уравнения (2.2.4) с помощью разностных уравнений МПА:

$$\begin{aligned}
 & m_{i-1, j-1} + 4m_{i-1, j} + m_{i-1, j+1} + \\
 & + 4m_{i, j-1} - 20m_{ij} + 4m_{i, j+1} + \\
 & + m_{i+1, j-1} + 4m_{i+1, j} + m_{i+1, j+1} - 0,5h \left( {}^{I-II} \Delta m_{i, j-1}^{\xi} - 7 {}^{I-II} \Delta m_{i, j}^{\xi} - 7 {}^{III-IV} \Delta m_{i, j}^{\xi} + \right. \\
 & \left. + {}^{III-IV} \Delta m_{i, j+1}^{\xi} \right) - 0,5h \left( {}^{I-III} \Delta m_{i-1, j}^{\eta} - 7 {}^{I-III} \Delta m_{i, j}^{\eta} - 7 {}^{II-IV} \Delta m_{i, j}^{\eta} + \right. \\
 & \left. + {}^{II-IV} \Delta m_{i+1, j}^{\eta} \right) = -\frac{3}{2} h^2 \left( {}^I g_{ij} + {}^{II} g_{ij} + {}^{III} g_{ij} + {}^{IV} g_{ij} \right).
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

В этом уравнении:

$^I g_{ij}, ^II g_{ij}, ^III g_{ij}, ^IV g_{ij}$  – значения  $g$  соответственно в элементах  $I, II, III, IV$  (рисунок 2.2);

$$m_{i,j}^{\xi} = \frac{\partial m}{\partial \xi_{i,j}} ; m_{i,j}^{\eta} = \frac{\partial m}{\partial \eta_{i,j}} ;$$

$^{I-II} \Delta m_{i,j}^{\xi}, ^{III-IV} \Delta m_{i,j}^{\xi}$  – скачки значений  $m_{i,j}^{\xi}$  в точке  $i,j$  соответственно между элементами  $I-II$  и  $III-IV$ .

Остальные величины подобного типа имеют аналогичный смысл.

Аппроксимируем аналогично (2.2.5) – (2.2.7):

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{i-1,j-1} + 4\bar{w}_{i-1,j} + \bar{w}_{i-1,j+1} + \\ & + 4\bar{w}_{i,j-1} - 20\bar{w}_{ij} + 4\bar{w}_{i,j+1} + \\ & + \bar{w}_{i+1,j-1} + 4\bar{w}_{i+1,j} + \bar{w}_{i+1,j+1} = -\frac{h^2}{12} (m_{i-1,j-1} + 4m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + \\ & + 4m_{i,j-1} + 52m_{ij} + 4m_{i,j+1} + m_{i+1,j-1} + 4m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1}) + \\ & + \frac{h^3}{24} ( ^{I-II} \Delta m_{i,j-1}^{\xi} + 5 ^{I-II} \Delta m_{i,j}^{\xi} + 5 ^{III-IV} \Delta m_{i,j}^{\xi} + ^{III-IV} \Delta m_{i,j+1}^{\xi} + \\ & + ^{I-III} \Delta m_{i-1,j}^{\eta} + 5 ^{I-III} \Delta m_{i,j}^{\eta} + 5 ^{II-IV} \Delta m_{i,j}^{\eta} + ^{II-IV} \Delta m_{i+1,j}^{\eta} ). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned} & f_{i-1,j-1} + 4f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} + \\ & + 4f_{i,j-1} - 20f_{ij} + 4f_{i,j+1} + \\ & + f_{i+1,j-1} + 4f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} = -\frac{h^2}{12} (\alpha_{i-1,j-1} + 4\alpha_{i-1,j} + \alpha_{i-1,j+1} + \\ & + 4\alpha_{i,j-1} + 52\alpha_{ij} + 4\alpha_{i,j+1} + \alpha_{i+1,j-1} + 4\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i+1,j+1}) + \\ & + \frac{h^3}{24} ( ^{I-II} \Delta \alpha_{i,j-1}^{\xi} + 5 ^{I-II} \Delta \alpha_{i,j}^{\xi} + 5 ^{III-IV} \Delta \alpha_{i,j}^{\xi} + ^{III-IV} \Delta \alpha_{i,j+1}^{\xi} + \\ & + ^{I-III} \Delta \alpha_{i-1,j}^{\eta} + 5 ^{I-III} \Delta \alpha_{i,j}^{\eta} + 5 ^{II-IV} \Delta \alpha_{i,j}^{\eta} + ^{II-IV} \Delta \alpha_{i+1,j}^{\eta} ). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned}
& \psi_{i-1,j-1} + 4\psi_{i-1,j} + \psi_{i-1,j+1} + \\
& + 4\psi_{i,j-1} - 20\psi_{ij} + 4\psi_{i,j+1} + \\
& + \psi_{i+1,j-1} + 4\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j+1} = -\frac{h^2}{12} (f_{i-1,j-1} + 4f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} + \\
& + 4f_{i,j-1} + 52f_{ij} + 4f_{i,j+1} + f_{i+1,j-1} + 4f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) + \\
& + \frac{h^3}{24} ({}^{I-II} \Delta f_{i,j-1}^{\xi} + 5{}^{I-II} \Delta f_{i,j}^{\xi} + 5{}^{III-IV} \Delta f_{i,j}^{\xi} + {}^{III-IV} \Delta f_{i,j+1}^{\xi} + \\
& + {}^{I-III} \Delta f_{i-1,j}^{\eta} + 5{}^{I-III} \Delta f_{i,j}^{\eta} + 5{}^{II-IV} \Delta f_{i,j}^{\eta} + {}^{II-IV} \Delta f_{i+1,j}^{\eta}).
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

#### 2.4. Учёт краевых условий.

Для построения алгоритма расчета гибких пластинок недостаточно выполнить аппроксимацию дифференциальных уравнений (2.2.4)-(2.2.7) в регулярных точках. Необходимо учесть краевые условия. Прежде всего, приведем на примере квадратной пластинки (Рисунок 2.3) используемые в настоящей работе условные обозначения: край ОА - жесткая заделка, край АВ - шарнирно-неподвижная опора, край ВС - шарнирно-подвижная опора и край СО - свободный от закрепления.

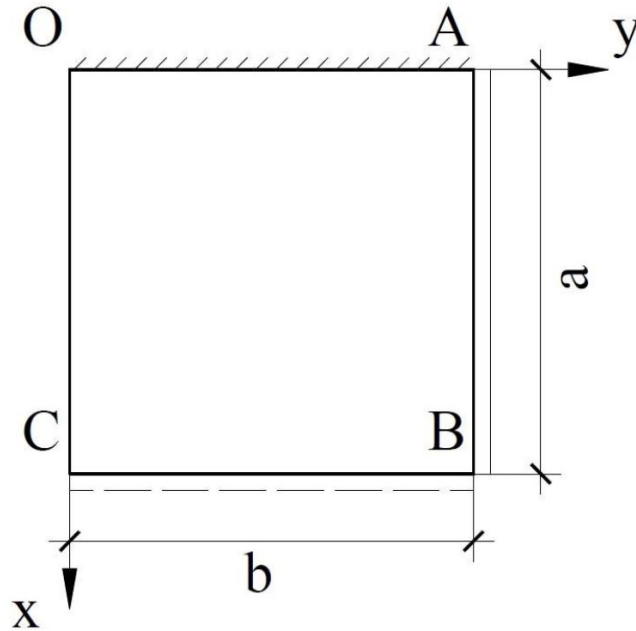

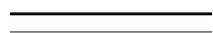




Рисунок 2.3 - Варианты закреплений краев пластинки.

Условные обозначения:

-  – Жесткая заделка;  
 – Шарнирно-неподвижная опора;  
 – Шарнирно-подвижная опора;  
 – Свободный от крепления.

Воспользуемся приведенными в [12] выражениями краевых условий:

1. Край пластинки оперт на ребро, которое не допускающие прогибы по отношению к плоскости  $x\eta$  ( $\xi\eta$ ) т.е:

$$w = 0 \text{ или } \bar{w} = 0. \quad (2.4.1)$$

2. 2. Край-жесткая заделка. Рассмотрим при  $x=0$  ( $\xi = 0$ ) :

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ или } \bar{w} = 0, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = 0. \quad (2.4.2)$$

3. Край шарнирно оперт  $x=0$  ( $\xi = 0$ ) :

$$w = 0, M_x = 0 \text{ или } \bar{w} = 0, m_\xi = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = 0. \quad (2.4.3)$$

4. Точки не загруженного края свободно смещаются вдоль оси  $z$ :

$$R_x = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \text{ или} \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta^2} = 0.$$

5. Точки незагруженного края свободно смещаются вдоль оси  $x$  ( $\xi$ )

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \text{ или} \quad (2.4.5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

6. Край  $x=0$  ( $\xi = 0$ ) и  $x=a$  ( $\xi = n_1 h$ ) закреплены таким образом, что взаимное смещение точек вдоль оси  $x$  невозможно:

$$u_{x=0} - u_{x=a} = \int_0^a \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0, \text{ или} \quad (2.4.6)$$

$$\int_0^{n_2 h} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi = 0.$$

Таким образом для пластин с подвижными опорами:

Сторона ОА:  $x=0$  ( $\xi=0$ )-жесткая заделка:  $w=0$  и  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$   $\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ ;  $\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$ . При учете того что в направлении заделки (вдоль оси  $y(\eta)$ ) в краевых точках  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$  или  $\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = 0$ ,  $M = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , т.е  $m = - \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) = - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}$ . Тогда краевые условия для жесткой заделки ОА  $x=0$  ( $\xi=0$ ):  $\bar{w} = 0$ ;  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = 0$ ;  $m = - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}$  и  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0$ ;  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ . Аналогично, если край  $y=0$  ( $\mu=0$ ) или  $y=b$  ( $\mu=n_2 h$ ) жёстко

защемлён, то краевые условия:

$$\bar{w} = 0; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} = 0; \quad m = - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.4.7)$$

Для края  $y=0$  ( $\eta=0$ ) жестко заделанного используем (6.1.2) труда [29]. При  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\delta = \beta = \sigma = 0$ ,  $\alpha_i = \gamma_i = \delta_i = \beta_i = \sigma_i = 0$  и  $\tau_1 = \tau_2 = h_1 = h_2 = h$  и условия  $\bar{w}_{i-1,j} = \bar{w}_{i,j} = \bar{w}_{i+1,j} = 0$  и  $w_{ij}^\eta = 0$  получим :

$$\begin{aligned} & 4\bar{w}_{i-1,j} + 2\bar{w}_{i-1,j+1} - \\ & -12h\bar{w}_{ij}^\eta - 20\bar{w}_{ij} + 8\bar{w}_{i,j+1} + \\ & 4\bar{w}_{i+1,j} + 2\bar{w}_{i+1,j+1} = -\frac{h^2}{24} \left( 5m_{i-1,j} + 8m_{i-1,j+1} - m_{i-1,j+2} + \right. \\ & \left. 74m_{i,j} + 56m_{i,j+1} - 10m_{i,j+2} + \right. \\ & \left. 5m_{i+1,j} + 8m_{i+1,j+1} - m_{i+1,j+2} \right) + \\ & + \frac{h^3}{12} \left( 5^{I-II} \Delta m_{i,j}^\xi + {}^{I-II} \Delta m_{i,j+1}^\xi \right). \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Сторона АВ:  $y=b$  ( $\eta = n_2 h$ ) - шарнирно неподвижная опора:  $\bar{w} = 0$ ;

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0; \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0; \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \text{ При учете в направлении}$$

заделки (вдоль оси  $x(\xi)$ ) в краевых точках  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$  или  $\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} = 0$ , имеем

$$M_y = D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ или } M = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ или } m = 0. \text{ Тогда краевые условия}$$

для шарнирно-неподвижной опоры АВ  $y=b$  ( $\eta = n_2 h$ ):  $\bar{w} = 0; m = 0$  и

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \text{ Аналогично, если край } x=0 (\xi = 0) \text{ или } x=a (\xi = n_1 h) \text{ жёстко}$$

защемлён, то краевые условия:

$$\bar{w} = 0; m = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.4.9)$$

Сторона ВС:  $x=a$  ( $\xi = n_1 h$ ) - шарнирно подвижная опора:  $\bar{w} = 0$ ;

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0; \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \text{ При учете в направлении}$$

заделки (вдоль оси  $y(\eta)$ ) в краевых точках  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ , или  $\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = 0$ , то  $M_x = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ ,

$$\text{или } M = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ или } m = 0. \text{ Тогда краевые условия для шарнирно}$$

неподвижной опоры ВС  $x=a$  ( $\xi = n_1 h$ ):  $\bar{w} = 0; m = 0$  и  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ .

Аналогично, если край  $y=0 (\eta = 0)$  или  $y=b (\xi = n_2 h)$  жёстко защемлён, краевые условия:

$$\bar{w} = 0; m = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.4.10)$$

Сторона СО:  $y=0$  ( $\eta=0$ )- свободна от закрепления:  $Q_y=0$ ;  $M_y=0$ ;

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0; \quad M_y = 0 \quad \text{по} \quad (2.1.3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{т.е}$$

$$M = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad m = -(1-\mu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}. \quad \text{Тогда краевые}$$

условия для края свободно от закрепления ВС:  $y=b$  ( $\eta=n_2 h$ ):  $q^{(\eta)}=0$ ;

$$m = -(1-\mu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad \text{Аналогично, если край } x=0 (\xi=0) \quad \text{или } x=a$$

( $\xi=n_1 h$ ) свободен от закрепления, краевые условия:

$$q^{(\xi)} = 0; \quad m = -(1-\mu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.4.11)$$

Тогда для края  $y=0$  ( $\eta=0$ ) свободного от закреплений используем (6.1.8) труда [130]. При  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\delta = \beta = \sigma = 0$ ,  $\alpha_i = \gamma_i = \delta_i = \beta_i = \sigma_i = 0$  и  $\tau_1 = \tau_2 = h_1 = h_2 = h$  запишем:

$$\begin{aligned} & (2+3\mu)m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} - \\ & -3h \left( {}^I q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II} q_{ij}^{(\eta)} \right) - 2(5+3\mu)m_{i,j} + 4m_{i-1,j+1} + \\ & (2+3\mu)m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1} + \\ & +3h {}^{I-II} \Delta m_{ij}^\xi - 3 \left( {}^I m_{i-1,j}^{(\eta)} - {}^I m_{i,j}^{(\eta)} - {}^{II} m_{i,j}^{(\eta)} + {}^{II} m_{i+1,j}^{(\eta)} \right) + \\ & \frac{6(1-\mu)}{h^2} \left( \bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i-1,j+1} - \right. \\ & \quad \left. -2\bar{w}_{i,j} + 2\bar{w}_{i,j+1} + \right. \\ & \quad \left. +\bar{w}_{i+1,j} - \bar{w}_{i+1,j+1} \right) = -1,5h^2 \left( {}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Второе уравнение для края свободного от закрепления ( $\eta=0$ ) сводится к следующему разностному уравнению труда [29]:



$$\begin{aligned} \bar{w}_{i-1,j} - 2\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{i+1,j} = & -\frac{h^2}{12(1-\mu)} \left( m_{i-1,j} + 10m_{i,j} + m_{i+1,j} - {}^I m_{i-1,j}^{(\eta)} - \right. \\ & \left. - 5{}^I m_{i,j}^{(\eta)} - 5{}^{II} m_{i,j}^{(\eta)} - {}^{II} m_{i+1,j}^{(\eta)} \right) + \frac{h^3}{12(1-\mu)} {}^{I-II} \Delta m_{ij}^{\xi}. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Уравнения МПА для угловой точки  $i, j$ , где закреплена верхняя сторона, а левая свободна от закрепления записывается одномерное разностное уравнение МПА [28]:

$$\begin{aligned} h\bar{w}_{ij}^{\xi} + \bar{w}_{i,j} - \bar{w}_{i+1,j} = & \frac{h^2}{12(1-\mu)} \left( 5{}^I m_{i,j} + {}^I m_{i+1,j} - 5{}^I m_{i,j}^{(\eta)} - \right. \\ & \left. - {}^I m_{i+1,j}^{(\eta)} \right) + \frac{h^3}{12(1-\mu)} \left( {}^I m_{ij}^{\xi} - {}^I m_{ij}^{(\eta)\xi} \right). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Входящее в (2.4.14) значение  $m_{ij}^{\xi}$  можно определить по квадратной параболы через  $m$ :

$$m_{ij}^{\xi} = \frac{1}{2h} \left( -3m_{i,j} + 4m_{i+1,j} - m_{i+2,j} \right) \quad (2.4.15)$$

В (2.4.14) значение  $m_{ij}^{\xi}$ ,  $\bar{w}_{i,j}$  заданы, в обычном случае  $m_{ij}^{\xi} = \bar{w}_{i,j} = 0$ .

Уравнения (2.4.13) и (2.4.14) для края  $\eta = nh$  записываются в зеркальном отображении,  $q_{ij}^{(\eta)}$  и  $\bar{w}_{ij}^{\eta}$  при этом меняют знак на обратный. Для верхнего и нижнего краев записываем уравнения с заменой  $\eta, i, j$  соответственно на  $\xi, j, i$ .

Для угла  $i, j$  с двумя пересекающимися свободными краями записывается одномерное разностное уравнение МПА [28] в случае  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\delta = \beta = \sigma = 0$ ,  $\alpha_i = \gamma_i = \delta_i = \beta_i = \sigma_i = 0$  и  $\tau_1 = \tau_2 = h_1 = h_2 = h$ :

$$\begin{aligned} \bar{w}_{ij}^{\xi\eta} = & \frac{1}{4h^2} \left( 9\bar{w}_{ij} - 12\bar{w}_{i,j+1} + 3\bar{w}_{i,j+2} - \right. \\ & - 12\bar{w}_{i+1,j} + 16\bar{w}_{i+1,j+1} - 4\bar{w}_{i+1,j+2} + \\ & \left. + 3\bar{w}_{i+2,j} - 4\bar{w}_{i+2,j+1} + \bar{w}_{i+2,j+2} \right). \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

при этом  $\bar{w}_{ij}^{\xi\eta} = 0$ .

После вычисления значений  $m$ ,  $\bar{w}$  во всех точках поля и контура из совместного решения составленных уравнений для определения  $m^{(\xi)}$ ,  $m^{(\eta)}$  необходимо определить  $\bar{w}^{\xi\xi}$  по следующей формуле труда [29]:

$$\begin{aligned}
& \frac{20}{h^2} w_{i-1,j} - \\
& - \frac{20}{h^2} w_{i-1,j} - 40 w_{ij}^{\xi\xi} - \frac{20}{h^2} w_{i-1,j} + \\
& + \frac{20}{h^2} w_{i+1,j} + \\
& + 2m_{i-1,j} - \\
& - 2m_{i-1,j} - 20m_{ij} - 2m_{i-1,j} + \\
& + 2m_{i+1,j} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Далее определяем значения  $\bar{w}^{\eta\eta}$  по (2.1.11).

Для пластинки с неподвижными опорами запишем такие условия только

заменяем  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$  на  $\int_0^a \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 \right] = 0$  при  $x = 0$  и

$x = a$  ( $\xi = 0$  и  $\xi = n_1 h$ ) а также  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$  на

$$\int_0^a \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b \text{ (} \eta = 0 \text{ и } \eta = n_2 h \text{)}.$$

Определим значения  $\psi_{ij}$ ,  $f_{ij}$  на краях. Учитываем, что при  $\eta = 0$  для пластин

с подвижными опорами тогда по (2.4.11)  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ .

По МКР:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}_{ij} = \frac{1}{h^2} (\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}) = 0. \tag{2.4.18}$$

Поскольку (2.4.18) – однородное уравнение все  $\psi$  на крае  $\eta = 0$  равны 0, то есть:

$$\psi_{i,j} = 0. \quad (2.4.19)$$

Из (2.2.7):  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f$ , при  $\xi = 0$ :  $f_{ij} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}_{ij}$ . В точке 00 (в узле):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}_{00} = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}_{00} = 0 \text{ тогда } f_{00} = 0.$$

Задаём:  $\psi = a\eta^2 + b\eta + c$  и определяем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 2a\eta + b.$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 2a = \text{const},$$

$$\text{Тогда } f_{ij} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}_{ij} = f_{00} = 0. \quad (2.4.20)$$

## 2.5. Выводы по главе 2

Исходная система двух дифференциальных неоднородных нелинейных уравнений четвёртого порядка сводятся к четырём однотипным дифференциальным уравнением второго порядка.

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных привлекается метод последовательных аппроксимаций (МПА), хорошо себя зарекомендовавший при решении уравнений типа Пуассона

Решение задач прямоугольных пластин под действием статических нагрузок с учетом геометрической нелинейности на базе разностных уравнений МПА сводится к совместному решению систем алгебраических уравнений для каждой регулярной точки сетки с учетом краевых условий по алгоритму решения (рисунок 2.1).

Разностные уравнения МПА позволяют производить расчет гибких пластин с различными видами краевых условий на действие различных нагрузок, в том числе разрывных.

### ГЛАВА 3. РАСЧЕТ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

#### 3.1. Дифференциальные уравнения гибких пластин на упругом основании

При расчете гибких пластинок на упругом основании типа Винклера в дифференциальном уравнении (2.1.1) вместо  $q$  будем иметь  $q-Kw$ . Запишем разрешающие дифференциальные уравнения гибких пластинок на упругом основании:

$$\frac{D}{H} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{H} (q - Kw); \quad (3.1.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (3.1.2)$$

где:  $K$  – коэффициент отпора упругого основания.

Компоненты  $w$  и  $\Phi$  представляют собой основные неизвестные системы.

Внутренние усилия  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $Q_x$  и  $Q_y$  вычислим через найденные значения  $w$  по формулам (2.1.3)-(2.1.5).

#### 3.2. Переход к безразмерным величинам.

Аналогично расчету гибких прямоугольных пластин без основания для построения численного решения задачи приводим разрешающие дифференциальные уравнения (3.1.1) и (3.1.2) к безразмерному виду:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} + (\bar{q} - \bar{K} \bar{w}). \quad (3.2.1)$$

где безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \frac{\Phi H}{D}; \quad \bar{w} = \frac{w}{a}; \quad \xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a}; \\ \bar{\nabla}^2 &= a^2 \nabla^2; \quad \bar{q} = \frac{qa^3}{D}; \quad \bar{K} = \frac{a^4 K}{D}; \quad k = \frac{EHa^2}{D}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Используя введенные ранее обозначения (2.1.13), (2.1.14), (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) получим систему дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнения (2.2.5) – (2.2.7) не изменятся.

Приведем ниже полученную систему:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -(g - \overline{Kw}); \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \eta^2} = -m; \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = -\alpha; \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f. \quad (3.2.6)$$

Аналогично главе 2 приведём на рисунке 3.1 блок-схему, иллюстрирующую алгоритм расчета.

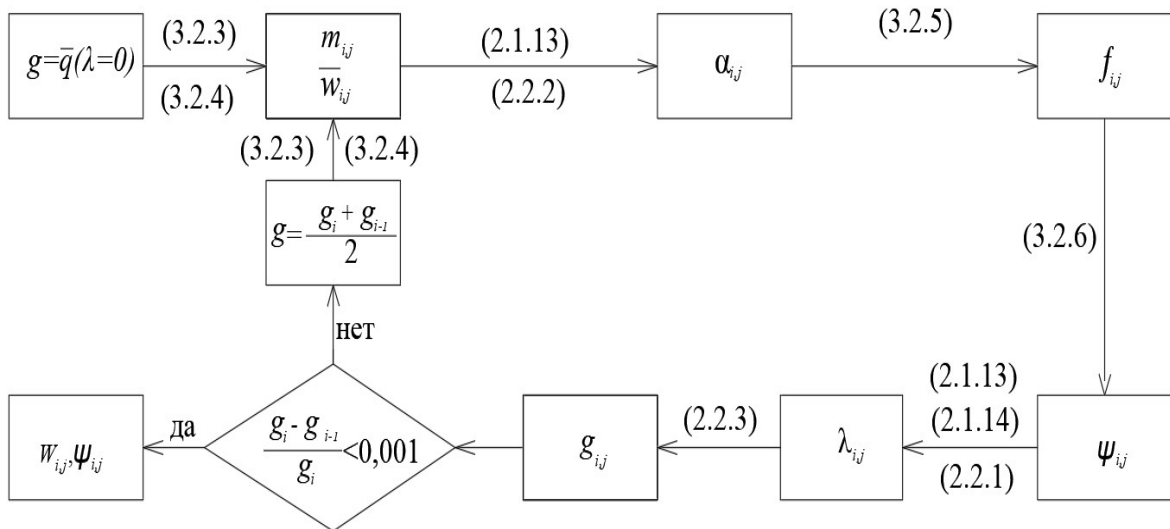


Рисунок 3.1. Блок-схема решения гибких пластинок на упругом основании.

### 3.3. Аппроксимация системы дифференциальных уравнений разностными уравнениями МПА.

Аппроксимация дифференциальных уравнений (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) рассмотрена во второй главе, где были получены уравнения (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5).

Приведём аппроксимацию уравнения (3.2.3) разностным уравнением МПА во внутренней точке  $i, j$  на квадратной сетке:

$$\begin{aligned}
& m_{i-1,j-1} + 4m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + \\
& + 4m_{i,j-1} - 20m_{ij} + 4m_{i,j+1} + \\
& + m_{i+1,j-1} + 4m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1} - 0,5h \left( {}^I\Delta m_{i,j-1}^\xi - 7{}^{I-II}\Delta m_{i,j}^\xi - 7{}^{III-IV}\Delta m_{i,j}^\xi + \right. \\
& \left. + {}^{III-IV}\Delta m_{i,j+1}^\xi \right) - 0,5h \left( {}^{I-III}\Delta m_{i-1,j}^\eta - 7{}^{I-III}\Delta m_{i,j}^\eta - 7{}^{II-IV}\Delta m_{i,j}^\eta + \right. \\
& \left. + {}^{II-IV}\Delta m_{i+1,j}^\eta \right) = -\frac{3}{2}h^2 \left( {}^I g_{ij} + {}^{II} g_{ij} + {}^{III} g_{ij} + {}^{IV} g_{ij} \right) + \Omega_1.
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

где:

$$\Omega_1 = \frac{h^2}{12} \left( \begin{aligned} & {}^I\bar{K}_{i-1,j-1} \bar{w}_{i-1,j-1} + 2 \left( {}^I\bar{K}_{i-1,j} + {}^{III}\bar{K}_{i-1,j} \right) \bar{w}_{i-1,j} + {}^{III}\bar{K}_{i-1,j+1} \bar{w}_{i-1,j+1} + \\ & + 2 \left( {}^I\bar{K}_{i,j-1} + {}^{II}\bar{K}_{i,j-1} \right) \bar{w}_{i,j-1} + 13 \left( {}^I\bar{K}_{i,j} + {}^{II}\bar{K}_{i,j} + \right. \\ & \left. + {}^{III}\bar{K}_{i,j} + {}^{IV}\bar{K}_{i,j} \right) \bar{w}_{ij} + 2 \left( {}^{III}\bar{K}_{i,j+1} + {}^{IV}\bar{K}_{i,j+1} \right) \bar{w}_{i,j+1} + \\ & \left. + {}^{II}\bar{K}_{i+1,j-1} \bar{w}_{i+1,j-1} + 2 \left( {}^{II}\bar{K}_{i+1,j} + {}^{IV}\bar{K}_{i+1,j} \right) \bar{w}_{i+1,j} + {}^{IV}\bar{K}_{i+1,j+1} \bar{w}_{i+1,j+1} \right). \end{aligned} \right) \tag{3.3.2}$$

Разностное уравнение (3.3.1) с учетом (3.3.2) позволяет вести расчет пластин, как при полном контакте с упругим основанием, так и при частичном отпоре, т.е при наличии зон, где контакт отсутствует.

### 3.4. Учет краевых условий

Учет краевых условий при расчете гибких пластинок на упругом основании производится аналогично разделу 2.4 главы 2. При этом (2.4.12) следует заменить на:

$$\begin{aligned}
& (2 + 3\mu)m_{i-1,j} + 2m_{i-1,j+1} - \\
& -3h\left({}^I q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II} q_{ij}^{(\eta)}\right) - 2(5 + 3\mu)m_{i,j} + 4m_{i-1,j+1} + \\
& (2 + 3\mu)m_{i+1,j} + 2m_{i+1,j+1} + \\
& + 3h^{I-II} \Delta m_{ij}^{\xi} - 3\left({}^I m_{i-1,j}^{(\eta)} - {}^I m_{i,j}^{(\eta)} - {}^{II} m_{i,j}^{(\eta)} + {}^{II} m_{i+1,j}^{(\eta)}\right) + \\
& + \frac{6(1-\mu)}{h^2} \left( w_{i-1,j} - w_{i-1,j+1} - \right. \\
& \quad \left. - 2w_{i,j} + 2w_{i,j+1} + \right. \\
& \quad \left. + w_{i+1,j} - w_{i+1,j+1} \right) = -1,5h^2 \left( {}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} \right) + \Omega_2,
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

где:

$$\Omega_2 = \frac{h^2}{48} \left( \begin{aligned}
& 5 {}^I \bar{K}_{i-1,j} \bar{w}_{i-1,j} + 4 \left( {}^I \bar{K}_{i-1,j+1} + {}^{III} \bar{K}_{i-1,j+1} \right) \bar{w}_{i-1,j+1} - {}^{III} \bar{K}_{i-1,j+2} \bar{w}_{i-1,j+2} + \\
& + 37 \left( {}^I \bar{K}_{i,j} + {}^{II} \bar{K}_{i,j} \right) \bar{w}_{i,j} + 14 \left( {}^I \bar{K}_{i,j+1} + {}^{II} \bar{K}_{i,j+1} + \right. \\
& \left. + {}^{III} \bar{K}_{i,j+1} + {}^{IV} \bar{K}_{i,j+1} \right) \bar{w}_{i,j+1} - 5 \left( {}^{III} \bar{K}_{i,j+2} + {}^{IV} \bar{K}_{i,j+2} \right) \bar{w}_{i,j+2} + \\
& \left. + 5 {}^{II} \bar{K}_{i+1,j} \bar{w}_{i+1,j} + 4 \left( {}^{II} \bar{K}_{i+1,j+1} + {}^{IV} \bar{K}_{i+1,j+1} \right) \bar{w}_{i+1,j+1} - {}^{IV} \bar{K}_{i+1,j+2} \bar{w}_{i+1,j+2} \right) \tag{3.4.2}
\end{aligned} \right)$$

### 3.5. Выводы по главе 3.

Предложенная во второй главе методика расчета гибких пластин с привлечением разностных уравнений МПА обобщена на случай учета отпора упругого основания. В качестве модели упругого основания рассмотрена винклеровская модель.

Методика позволяет учитывать не только конечные разрывы в функции нагрузки (кусочно-постоянная, полосовая нагрузка), но в исходной функции жесткости основания. Это обеспечивает возможность рассматривать работу гибких пластин, частично контактирующих с упругим основанием. Под частичным или неполным контактом мы подразумеваем наличие технологических полостей под плитой, коллекторов, полостей, имеющих аварийную природу образования (карстовые явления, размывы и т.д.)

Составленные программы для ЭВМ и результаты решения тестовых и новых задач приводятся в главе 4.

**ГЛАВА 4. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ ПО РАСЧЕТУ ГИБКИХ ПЛАСТИН НА СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ БЕЗ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ И НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ.**

**4.1. Разработка программ для ЭВМ по расчету гибких пластин на статические нагрузки без упругого основания с использованием пакета прикладных программ MATLAB.**

Для решения систем линейных алгебраических уравнений, используем пакеты прикладных программы MATLAB.

Если для каждой расчетной точки соответствующей шаблон (2.2.4) и (2.2.5) составить разностные уравнения то мы получим систему уравнений которую можно записать в матричном виде. Для этого обозначим:

$$\begin{aligned}
 X_{mw}^- &= \left[ \begin{array}{c} m_{1,1}, m_{1,2}, \dots, m_{1,m+1}, m_{2,1}, m_{2,2}, \dots, m_{2,m+1}, \dots, m_{n+1,1}, m_{n+1,2}, \dots, m_{n+1,m+1}, \\ \overline{w}_{1,1}, \overline{w}_{1,2}, \dots, \overline{w}_{1,m+1}, \overline{w}_{2,1}, \overline{w}_{2,2}, \dots, \overline{w}_{2,m+1}, \dots, \overline{w}_{n+1,1}, \overline{w}_{n+1,2}, \dots, \overline{w}_{n+1,m+1} \end{array} \right]^T \\
 A_{mwij}^- &= \left[ \begin{array}{c} A_{m_{i,1}}, A_{m_{i,2}}, \dots, A_{m_{i,m+1}}, A_{m_{2,1}}, A_{m_{2,2}}, \dots, A_{m_{2,n+1}}, \dots, A_{m_{m+1,1}}, A_{m_{n+1,2}}, \dots, A_{m_{n+1,m+1}}, \\ A_{w_{1,1}}, A_{w_{1,2}}, \dots, A_{w_{1,m+1}}, A_{w_{2,1}}, A_{w_{2,2}}, \dots, A_{w_{2,n+1}}, \dots, A_{w_{m+1,1}}, A_{w_{n+1,2}}, \dots, A_{w_{n+1,m+1}} \end{array} \right] \\
 A_{wmij}' &= \left[ \begin{array}{c} A'_{m_{i,1}}, A'_{m_{i,2}}, \dots, A'_{m_{i,m+1}}, A'_{m_{2,1}}, A'_{m_{2,2}}, \dots, A'_{m_{2,n+1}}, \dots, A'_{m_{m+1,1}}, A'_{m_{n+1,2}}, \dots, A'_{m_{n+1,m+1}}, \\ A'_{w_{1,1}}, A'_{w_{1,2}}, \dots, A'_{w_{1,m+1}}, A'_{w_{2,1}}, A'_{w_{2,2}}, \dots, A'_{w_{2,n+1}}, \dots, A'_{w_{m+1,1}}, A'_{w_{n+1,2}}, \dots, A'_{w_{n+1,m+1}} \end{array} \right]
 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Мы можем писать уравнение (2.3.2) для каждой регулярной точки с учётом краевых условий для безразмерного суммарного момента каждой точки  $i, j$ :

$$A_{mwij}^- X_{mwij}^- = B_{mij}, \quad (4.1.2)$$

где:

-Коэффициенты матриц  $A_{mwij}^-$  и  $B_{mij}$  для внутренней точки  $i, j$  которой задаются по формуле:



$$\begin{aligned}
A_{m_{i-1,j-1}} &= 1; & A_{m_{i-1,j}} &= 4; & A_{m_{i-1,j+1}} &= 1; \\
A_{m_{i,j-1}} &= 4; & A_{m_{i,j}} &= -20; & A_{m_{i,j+1}} &= 4; \\
A_{m_{i+1,j-1}} &= 1; & A_{m_{i+1,j}} &= 4; & A_{m_{i+1,j+1}} &= 1;
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

$$\begin{aligned}
B_{m_{ij}} &= 0,5h \left( {}^{I-II} \Delta m_{i,j-1}^{\xi} - 7 {}^{I-II} \Delta m_{i,j}^{\xi} - 7 {}^{III-IV} \Delta m_{i,j}^{\xi} + {}^{III-IV} \Delta m_{i,j+1}^{\xi} \right) + \\
&+ 0,5h \left( {}^{I-III} \Delta m_{i-1,j}^{\eta} - 7 {}^{I-III} \Delta m_{i,j}^{\eta} - 7 {}^{II-IV} \Delta m_{i,j}^{\eta} + {}^{II-IV} \Delta m_{i+1,j}^{\eta} \right) - \\
&- \frac{3}{2} h^2 \left( {}^I g_{ij} + {}^{II} g_{ij} + {}^{III} g_{ij} + {}^{IV} g_{ij} \right).
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Остальные коэффициенты равны 0.

-Для точки  $i, j$  лежащей на шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной опоре используем (2.4.9), тогда коэффициенты матриц  $A_{m_{wij}}$  и  $B_{m_{ij}}$  задаются по формуле:

$$A_{m_{i,j}} = 1; \quad B_{m_{i,j}} = 0; \tag{4.1.5}$$

-Для точки  $i, j$  лежащей на жетской заделке используем (2.4.8), тогда коэффициенты матриц  $A_{m_{wij}}$  и  $B_{m_{ij}}$  записываются по формуле:

$$\begin{aligned}
A_{m_{i-1,j}} &= -\frac{5h^2}{24}; & A_{m_{i-1,j+1}} &= -\frac{8h^2}{24}; & A_{m_{i-1,j+2}} &= \frac{h^2}{24}; \\
A_{m_{i,j}} &= -\frac{74h^2}{24}; & A_{m_{i,j+1}} &= -\frac{56h^2}{24}; & A_{m_{i,j+2}} &= \frac{10h^2}{24}; \\
A_{m_{i+1,j}} &= -\frac{5h^2}{24}; & A_{m_{i+1,j+1}} &= -\frac{8h^2}{24}; & A_{m_{i+1,j+2}} &= \frac{h^2}{24}; \\
A_{w_{i-1,j+1}} &= -2; & A_{w_{i,j+1}} &= -8; & A_{w_{i+1,j+1}} &= -2;
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

$$B_{m_{ij}} = -\frac{h^2}{24} \left( 5 {}^{I-II} \Delta m_{i,j}^{\xi} + 5 {}^{I-II} \Delta m_{i,j+1}^{\xi} \right); \tag{4.1.7}$$

-Для точки  $i, j$  лежащей на крае ( $\eta = 0$ ) свободного от закреплений используем (2.4.13), тогда коэффициенты матриц  $A_{m_{wij}}$  и  $B_{m_{ij}}$  задаются по формуле:

$$\begin{aligned}
A_{m_{i-1,j}} &= (2+3\mu); & A_{m_{i-1,j+1}} &= 1; \\
A_{m_{i,j}} &= -2(5+3\mu); & A_{m_{i,j+1}} &= 4; \\
A_{m_{i+1,j}} &= (2+3\mu); & A_{m_{i+1,j+1}} &= 1; \\
A_{w_{i-1,j}}^- &= \frac{6(1-\mu)}{h^2}; & A_{w_{i-1,j+1}}^- &= -\frac{6(1-\mu)}{h^2}; \\
A_{w_{i,j}}^- &= -\frac{12(1-\mu)}{h^2}; & A_{w_{i,j+1}}^- &= \frac{12(1-\mu)}{h^2}; \\
A_{w_{i+1,j}}^- &= \frac{6(1-\mu)}{h^2}; & A_{w_{i+1,j+1}}^- &= -\frac{6(1-\mu)}{h^2};
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

$$\begin{aligned}
B_{m_{ij}} &= 3h \left( {}^I q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II} q_{ij}^{(\eta)} \right) - 3h^{I-II} \Delta m_{ij}^\xi + 3 \left( m_{i-1,j}^{(\eta)} - {}^I m_{i,j}^{(\eta)} - \right. \\
&\quad \left. - {}^{II} m_{i,j}^{(\eta)} + m_{i+1,j}^{(\eta)} \right) - 1,5h^2 \left( {}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} \right).
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Мы можем писать уравнение (2.3.3) для каждой регулярной точки с учётом краевых условий (2.2.4) безразмерного прогиба каждой точки  $i,j$ :

$$A_{wm_{ij}}^- X_{mw_{ij}}^- = B_{w_{ij}}^-, \tag{4.1.10}$$

где:

-Коэффициенты матриц  $A_{wm_{ij}}^-$  и  $B_{w_{ij}}^-$  для внутренней точки  $i,j$  которой задаются по формуле:

$$\begin{aligned}
A_{w_{i-1,j-1}}' &= 1; & A_{w_{i-1,j}}' &= 4; & A_{w_{i-1,j+1}}' &= 1; \\
A_{w_{i,j-1}}' &= 4; & A_{w_{i,j}}' &= -20; & A_{w_{i,j+1}}' &= 4; \\
A_{w_{i+1,j-1}}' &= 1; & A_{w_{i+1,j}}' &= 4; & A_{w_{i+1,j+1}}' &= 1; \\
A_{m_{i-1,j-1}}' &= \frac{h^2}{12}; & A_{m_{i-1,j}}' &= \frac{4h^2}{12}; & A_{m_{i-1,j+1}}' &= \frac{h^2}{12}; \\
A_{m_{i,j-1}}' &= \frac{4h^2}{12}; & A_{m_{i,j}}' &= \frac{52h^2}{12}; & A_{m_{i,j+1}}' &= \frac{4h^2}{12}; \\
A_{m_{i+1,j-1}}' &= \frac{h^2}{12}; & A_{m_{i+1,j}}' &= \frac{4h^2}{12}; & A_{m_{i+1,j+1}}' &= \frac{h^2}{12};
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

$$\begin{aligned}
B_{w_{ij}}^- &= \frac{h^3}{24} \left( {}^{I-II} \Delta m_{i,j-1}^\xi + 5 {}^{I-II} \Delta m_{i,j}^\xi + 5 {}^{III-IV} \Delta m_{i,j}^\xi + {}^{III-IV} \Delta m_{i,j+1}^\xi + \right. \\
&\quad \left. + {}^{I-III} \Delta m_{i-1,j}^\eta + 5 {}^{I-III} \Delta m_{i,j}^\eta + 5 {}^{II-IV} \Delta m_{i,j}^\eta + {}^{II-IV} \Delta m_{i+1,j}^\eta \right).
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

-Для точки  $i,j$  лежащей на шарнирно-неподвижной, шарнирно-подвижной опоре и используем жетской заделке  $\bar{w}_{i,j} = 0$ , тогда коэффициенты матриц  $A_{wm_{ij}}^-$  и  $B_{w_{ij}}^-$  записываются по формуле:

$$A_{w_{i,j}}' = 1; B_{w_{i,j}}^- = 0. \quad (4.1.13)$$

-Для точки  $i,j$  лежащей на крае ( $\eta=0$ ) свободного от закреплений используем (2.4.13), тогда коэффициенты матриц  $A_{wm_{ij}}^-$  и  $B_{w_{ij}}^-$  задаются по формуле:

$$\begin{aligned} A_{w_{i-1,j}}' &= 1; A_{w_{i,j}}' = -2; A_{w_{i+1,j}}' = 1; \\ A_{m_{i-1,j}}' &= -\frac{h^2}{12(1-\mu)}; A_{m_{i,j}}' = -\frac{10h^2}{12(1-\mu)}; A_{m_{i+1,j}}' = -\frac{h^2}{12(1-\mu)}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

$$B_{w_{ij}}^- = \frac{h^2}{12(1-\mu)} \left( {}^I m_{i-1,j}^{(\eta)} + 5 {}^I m_{i,j}^{(\eta)} + 5 {}^{II} m_{i,j}^{(\eta)} + {}^{II} m_{i+1,j}^{(\eta)} \right) + \frac{h^3}{12(1-\mu)} {}^{I-II} \Delta m_{ij}^\xi. \quad (4.1.15)$$

Таким образом, можно записать систему уравнений (2.2.4), (2.2.5) после аппроксимации для каждой регулярной точки сетки в матричном виде:

$$[A] \cdot [X_{mw}^-] = [B], \quad (4.1.16)$$

где  $A = \begin{bmatrix} A_{mw}^- \\ A_{wm}^- \end{bmatrix}$  - матрица размера  $[2(n+1)(m+1) \times 2(n+1)(m+1)]$ .

$$A_{mw}^- = \begin{bmatrix} A_{m_{11}} \\ A_{m_{12}} \\ \vdots \\ A_{m_{n+1,m+1}} \\ A_{w_{11}}^- \\ A_{w_{12}}^- \\ \vdots \\ A_{w_{n+1,m+1}}^- \end{bmatrix} \quad \text{- матрица размера } [(n+1)(m+1) \times 2(n+1)(m+1)].$$

$$A_{wm}^- = \begin{bmatrix} A'_{m_{11}} \\ A'_{m_{12}} \\ \vdots \\ A'_{m_{n+1,m+1}} \\ A'_{w_{11}} \\ A'_{w_{12}} \\ \vdots \\ A'_{w_{n+1,m+1}} \end{bmatrix} \quad \text{- матрица размера } [(n+1)(m+1) \times 2(n+1)(m+1)].$$

$$B_{mw}^- = \begin{bmatrix} B_m \\ B_w^- \end{bmatrix} \quad \text{- вектор-столбец размера } 2(n+1)(m+1) \times 1.$$

$$B_m = \begin{bmatrix} B_{m_{11}} \\ B_{m_{12}} \\ \vdots \\ B_{m_{n+1,m+1}} \end{bmatrix} \quad \text{- вектор-столбец размера } (n+1)(m+1) \times 1.$$

$$B_w^- = \begin{bmatrix} B_{w_{11}}^- \\ B_{w_{12}}^- \\ \vdots \\ B_{w_{n+1,m+1}}^- \end{bmatrix} \quad \text{- вектор-столбец размера } (n+1)(m+1) \times 1.$$

Если обозначим:

$$\begin{aligned} X_f &= [f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,m+1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{2,m+1}, \dots, f_{n+1,1}, f_{n+1,2}, \dots, f_{n+1,m+1}]^T \\ A_{f_{ij}} &= [A_{f_{1,1}}, A_{f_{1,2}}, \dots, A_{f_{1,m+1}}, A_{f_{2,1}}, A_{f_{2,2}}, \dots, A_{f_{2,n+1}}, \dots, A_{f_{m+1,1}}, A_{f_{n+1,2}}, \dots, A_{f_{n+1,m+1}}] \\ X_\psi &= [\psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \dots, \psi_{1,m+1}, \psi_{2,1}, \psi_{2,2}, \dots, \psi_{2,m+1}, \dots, \psi_{n+1,1}, \psi_{n+1,2}, \dots, \psi_{n+1,m+1}]^T \\ A_{\psi_{ij}} &= [A_{\psi_{1,1}}, A_{\psi_{1,2}}, \dots, A_{\psi_{1,m+1}}, A_{\psi_{2,1}}, A_{\psi_{2,2}}, \dots, A_{\psi_{2,n+1}}, \dots, A_{\psi_{m+1,1}}, A_{\psi_{n+1,2}}, \dots, A_{\psi_{n+1,m+1}}] \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Аналогично записываем в матричном виде уравнения (2.3.4), (2.3.5) для каждой регулярной точки сетки:

$$[A_f] \cdot [X_f] = [B_f]; \quad (4.1.18)$$

$$[A_\psi] \cdot [X_\psi] = [B_\psi]. \quad (4.1.19)$$

где  $A_f = \begin{bmatrix} A_{f_{11}} \\ A_{f_{12}} \\ \vdots \\ A_{f_{n+1,m+1}} \end{bmatrix}$  - матрица размера  $[(n+1)(m+1) \times (n+1)(m+1)]$ .

$A_\psi = \begin{bmatrix} A_{f_{11}} \\ A_{f_{12}} \\ \vdots \\ A_{f_{n+1,m+1}} \end{bmatrix}$  - матрица размера  $[(n+1)(m+1) \times (n+1)(m+1)]$ .

$B_f = \begin{bmatrix} B_{\psi_{11}} \\ B_{\psi_{12}} \\ \vdots \\ B_{\psi_{n+1,m+1}} \end{bmatrix}$  - вектор-столбец размера  $(n+1) \times (m+1)$ .

$B_\psi = \begin{bmatrix} B_{\psi_{11}} \\ B_{\psi_{12}} \\ \vdots \\ B_{\psi_{n+1,m+1}} \end{bmatrix}$  - вектор-столбец размера  $(n+1) \times (m+1)$ .

Определим последовательно  $[A_f]$ ,  $[B_f]$ ,  $[A_\psi]$  и  $[B_\psi]$  для внутренних точек с помощью уравнений (2.3.4) и (2.3.5). Тогда матрицы  $[A_f]$  строки для внутренней точки  $i, j$  которой и  $[B_f]$  элементы для внутренней точки  $i, j$  которого вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned} A_{f_{i-1,j-1}} &= 1; & A_{f_{i-1,j}} &= 4; & A_{f_{i-1,j+1}} &= 1; \\ A_{f_{i,j-1}} &= 4; & A_{f_{i,j}} &= -20; & A_{f_{i,j+1}} &= 4; \\ A_{f_{i+1,j-1}} &= 1; & A_{f_{i+1,j}} &= 4; & A_{f_{i+1,j+1}} &= 1; \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

$$\begin{aligned}
B_{f_{ij}} = & -\frac{h^2}{12} \left( \alpha_{i-1,j-1} + 4\alpha_{i-1,j} + \alpha_{i-1,j+1} + \right. \\
& + 4\alpha_{i,j-1} + 52\alpha_{ij} + 4\alpha_{i,j+1} + \\
& \left. + \alpha_{i+1,j-1} + 4\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i+1,j+1} \right) + \\
& + \frac{h^3}{24} \left( {}^{I-II} \Delta \alpha_{i,j-1}^\xi + 5 {}^{I-II} \Delta \alpha_{i,j}^\xi + 5 {}^{III-IV} \Delta \alpha_{i,j}^\xi + {}^{III-IV} \Delta \alpha_{i,j+1}^\xi + \right. \\
& \left. + {}^{I-III} \Delta \alpha_{i-1,j}^\eta + 5 {}^{I-III} \Delta \alpha_{i,j}^\eta + 5 {}^{II-IV} \Delta \alpha_{i,j}^\eta + {}^{II-IV} \Delta \alpha_{i+1,j}^\eta \right).
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

а матрицы  $[A_\psi]$  строки для внутренней точки  $i,j$  которой и  $[B_\psi]$  элементы для внутренней точки  $i,j$  которого вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned}
A_{\psi_{i-1,j-1}} &= 1; \quad A_{\psi_{i-1,j}} = 4; \quad A_{\psi_{i-1,j+1}} = 1; \\
A_{\psi_{i,j-1}} &= 4; \quad A_{\psi_{i,j}} = -20; \quad A_{\psi_{i,j+1}} = 4; \\
A_{\psi_{i+1,j-1}} &= 1; \quad A_{\psi_{i+1,j}} = 4; \quad A_{\psi_{i+1,j+1}} = 1;
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

$$\begin{aligned}
B_{\psi_{ij}} = & -\frac{h^2}{12} \left( f_{i-1,j-1} + 4f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} + \right. \\
& + 4f_{i,j-1} + 52f_{ij} + 4f_{i,j+1} + \\
& \left. f_{i+1,j-1} + 4f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} \right) + \\
& + \frac{h^3}{24} \left( {}^{I-II} \Delta f_{i,j-1}^\xi + 5 {}^{I-II} \Delta f_{i,j}^\xi + 5 {}^{III-IV} \Delta f_{i,j}^\xi + {}^{III-IV} \Delta f_{i,j+1}^\xi + \right. \\
& \left. + {}^{I-III} \Delta f_{i-1,j}^\eta + 5 {}^{I-III} \Delta f_{i,j}^\eta + 5 {}^{II-IV} \Delta f_{i,j}^\eta + {}^{II-IV} \Delta f_{i+1,j}^\eta \right).
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Аналогично для краевых точек для подвижной опоры по (2.4.19) и (2.4.20)  $\psi_{i,j} = 0$  и  $f_{i,j} = 0$ , тогда  $[A_f]$ ,  $[B_f]$  строки для краевой точки  $i,j$  которой и  $[A_\psi]$ ,  $[B_\psi]$  элементы для краевой точки  $i,j$  которого вычисляются по формуле:

$$A_{f_{i,j}} = 1; \quad B_{f_{i,j}} = 0. \tag{4.1.24}$$

$$A_{\psi_{i,j}} = 1; \quad B_{\psi_{i,j}} = 0. \tag{4.1.25}$$

Вычисления проводится с использованием оператора цикла. Тексты программ приведены в приложении Б.

#### 4.2. Разработка программ для ЭВМ по расчету гибких пластин на статические нагрузки на упругм основании с применением разностных уравнений МПА.

Аналогично разделу 4.1, для решения системы линейных алгебраических уравнений используется метод матриц для программы MATLAB. Запишем систему уравнений (3.2.3) и (3.2.4) для каждой регулярной точки сетки матричном виде:

$$[A] \cdot [X_{mw}] = [B], \quad (4.2.1)$$

Кроме матрицы  $[A_{mw}]$  и  $[B_m]$  в внутренней точке необходимо использовать уравнение (3.4.1), тогда матрица  $[A_{mw}]$  строки для внутренней точки  $i, j$  которой будут таковы:

$$\begin{aligned} A_{m_{i-1,j-1}} &= 1; A_{m_{i-1,j}} = 4; A_{m_{i-1,j+1}} = 1; \\ A_{m_{i,j-1}} &= 4; A_{m_{i,j}} = -20; A_{m_{i,j+1}} = 4; \\ A_{m_{i+1,j-1}} &= 1; A_{m_{i+1,j}} = 4; A_{m_{i+1,j+1}} = 1; \\ A_{w_{i-1,j-1}} &= -I \bar{K}_{i-1,j-1} \frac{h^2}{12}; A_{w_{i-1,j-1}} = -2 \left( I \bar{K}_{i-1,j} + III \bar{K}_{i-1,j} \right) \frac{h^2}{12}; \\ A_{w_{i-1,j-1}} &= -III \bar{K}_{i-1,j+1} \cdot \frac{h^2}{12}; A_{w_{i-1,j-1}} = -2 \left( I \bar{K}_{i,j-1} + II \bar{K}_{i,j-1} \right) \cdot \frac{h^2}{12}; \\ A_{w_{i,j-1}} &= -13 \left( I \bar{K}_{i,j} + II \bar{K}_{i,j} + III \bar{K}_{i,j} + IV \bar{K}_{i,j} \right) \frac{h^2}{12}; \\ A_{w_{i,j-1}} &= -2 \left( III \bar{K}_{i,j+1} + IV \bar{K}_{i,j+1} \right) \frac{h^2}{12}; A_{w_{i+1,j-1}} = -II \bar{K}_{i+1,j-1} \frac{h^2}{12}; \\ A_{w_{i+1,j-1}} &= -2 \left( II \bar{K}_{i+1,j} + IV \bar{K}_{i+1,j} \right) \frac{h^2}{12}; A_{w_{i+1,j-1}} = -IV \bar{K}_{i+1,j+1} \frac{h^2}{12}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Матрица  $[B_m]$  элементы которого вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned} B_{m_{ij}} &= 0,5h \left( I-II \Delta m_{i,j-1}^{\xi} - 7^{I-II} \Delta m_{i,j}^{\xi} - 7^{III-IV} \Delta m_{i,j}^{\xi} + III-IV \Delta m_{i,j+1}^{\xi} \right) + \\ &+ 0,5h \left( I-III \Delta m_{i-1,j}^{\eta} - 7^{I-III} \Delta m_{i,j}^{\eta} - 7^{II-IV} \Delta m_{i,j}^{\eta} + II-IV \Delta m_{i+1,j}^{\eta} \right) - \\ &- \frac{3}{2} h^2 \left( I g_{ij} + II g_{ij} + III g_{ij} + IV g_{ij} \right). \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

и края свободного от закреплений, используем (3.4.1) и (3.4.2), тогда матрица

$[A_{wm}^-]$  строки для для краевой точки  $i, j$ :

$$\begin{aligned}
A'_{m_{i-1,j}} &= (2 + 3\mu); \quad A'_{m_{i-1,j+1}} = 1; \\
A'_{m_{i,j}} &= -2(5 + 3\mu); \quad A'_{m_{i,j+1}} = 4; \\
A'_{m_{i+1,j}} &= (2 + 3\mu); \quad A'_{m_{i+1,j+1}} = 1; \\
A'_{w_{i-1,j}} &= \left[ \frac{6(1-\mu)}{h^2} - 5 \frac{h^2}{48} {}^I \bar{K}_{i-1,j} \right]; \\
A'_{w_{i-1,j+1}} &= - \left[ \frac{6(1-\mu)}{h^2} + \frac{h^2}{12} ({}^I \bar{K}_{i-1,j+1} + {}^{III} \bar{K}_{i-1,j+1}) \right]; \\
A'_{w_{i-1,j+2}} &= \frac{h^2}{48} {}^{III} \bar{K}_{i-1,j+2}; \quad A'_{w_{i,j}} = - \left[ \frac{12(1-\mu)}{h^2} + 37 \frac{h^2}{48} ({}^I \bar{K}_{i,j} + {}^{II} \bar{K}_{i,j}) \right]; \\
A'_{w_{i,j+1}} &= \left[ \frac{12(1-\mu)}{h^2} - 7 \frac{h^2}{24} ({}^I \bar{K}_{i,j+1} + {}^{II} \bar{K}_{i,j+1} + {}^{III} \bar{K}_{i,j+1} + {}^{IV} \bar{K}_{i,j+1}) \right]; \\
A'_{w_{i,j+2}} &= 5 \frac{h^2}{48} ({}^{III} \bar{K}_{i,j+2} + {}^{IV} \bar{K}_{i,j+2}); \quad A'_{w_{i+1,j}} = \left[ \frac{6(1-\mu)}{h^2} - 5 \frac{h^2}{48} {}^{II} \bar{K}_{i+1,j} \right]; \\
A'_{w_{i+1,j+1}} &= - \left[ \frac{6(1-\mu)}{h^2} + \frac{h^2}{12} ({}^{II} \bar{K}_{i+1,j+1} + {}^{IV} \bar{K}_{i+1,j+1}) \right]; \quad A'_{w_{i+1,j+2}} = \frac{h^2}{48} {}^{IV} \bar{K}_{i+1,j+2}.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

а  $[B_w^-]$  элементы которого вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned}
B_{w_{ij}}^- &= 3h ({}^I q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II} q_{ij}^{(\eta)}) - 3h^{I-II} \Delta m_{ij}^\xi + 3 (m_{i-1,j}^{(\eta)} - {}^I m_{i,j}^{(\eta)} - \\
&\quad - {}^{II} m_{i,j}^{(\eta)} + m_{i+1,j}^{(\eta)}) - 1,5h^2 ({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij}).
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Записываем матрицы  $[A_{mw}^-]$ ,  $[A_{wm}^-]$ ,  $[B_m]$  и  $[B_w^-]$  для внутренних точек и других краевых условий аналогично разделу 4.1.

Для решения системы уравнений (3.3.4), (3.3.5) запишем  $[A_f]$ ,  $[B_f]$ ,  $[A_\psi]$  и  $[B_\psi]$  аналогично разделу 4.1.

Вычисления проводятся с использованием операторы цикла (смотреть приложение).



### 4.3. Примеры расчета гибких пластин без упругого основания.

#### 4.3.1. Расчёт гибкой квадратной пластины, защемлённой по всем краям, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой.

Приведем ниже решение тестовой задачи, заимствованной из [12]. Толщина пластины  $H=0,1$  см, сторона  $a=10$  см, нагрузка  $q=0,5$  кг/см<sup>2</sup>, модуль упругости  $E=0,75 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu=0,316$  (Рисунок 4.1).

В качестве иллюстрации методики продемонстрируем реализацию алгоритма на минимально возможно расчетной сетке. Примем величину шага сетки равной половине длины стороны квадратной пластины. Перейдем к безразмерным

$$\text{величинам: } \bar{q} = \frac{qa^3}{D} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{69,433} = 7,2 \quad k = \frac{EHa^2}{D} = \frac{0,75 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 10^2}{69,433} = 108817,8$$

Краевые условия [1] на сторонах  $\xi=0$  и  $\xi=2h$ :

$$\bar{w} = 0, w^\xi = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

На сторонах  $\eta=0$  и  $\eta=2h$  получим те же граничные условия, поменяв  $\xi$  на  $\eta$ .

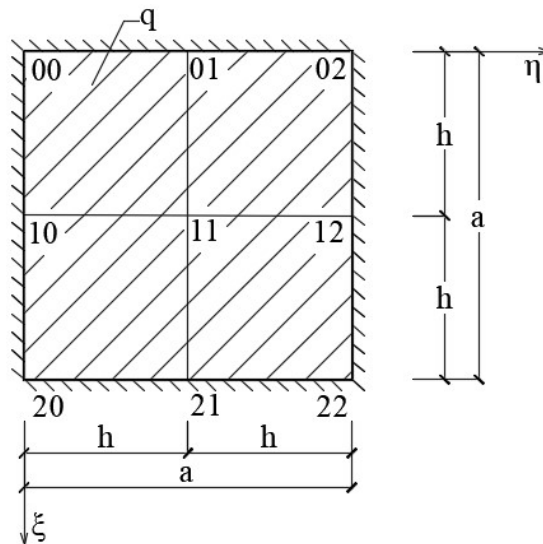


Рисунок 4.1 - Квадратная пластина, с защемлёнными свободно сближающимися краями.

Определив производные (2.1.13) и (2.1.14) по МПА (2.4.17) и учитывая краевые условия, получим:

$$l_{11} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} = \frac{-\xi\xi}{w_{11}} = \frac{1}{2h^2} (\bar{w}_{01} - \bar{w}_{10} - \bar{w}_{12} + \bar{w}_{21}) + \frac{1}{20} (m_{01} - m_{10} - 10m_{11} - m_{12} + m_{21}) =$$

$$= -\frac{1}{2} m_{11};$$

$$n_{11} = \frac{-\eta\eta}{w_{11}} = -m_{11} - \frac{-\xi\xi}{w_{11}} = -\frac{1}{2} m_{11};$$

$$t_{11} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{-\xi\eta}{w_{11}} = \frac{1}{4h^2} (\bar{w}_{00} - \bar{w}_{02} - \bar{w}_{20} + \bar{w}_{22}) = 0.$$

Аналогично:

$$b_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = \psi_{11}^{\xi\xi} = -\frac{1}{2} f_{11}; \quad c_{11} = \psi_{11}^{\eta\eta} = -f_{11} - \psi_{11}^{\xi\xi} = -\frac{1}{2} f_{11};$$

$$d_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = \psi_{11}^{\xi\eta} = 0.$$

Тогда по (2.2.1) и (2.2.2):

$$\lambda_{11} = \frac{1}{2} m_{11} f_{11}. \quad (4.3.1)$$

$$\alpha_{11} = k(l_{11}^2 - n_{11} l_{11}) = -\frac{k}{4} m_{11}^2. \quad (4.3.2)$$

Записав разностную аппроксимацию (2.2.4), (2.2.5), по уравнениям (2.3.2), (2.3.3) и учитывая краевые условия по (2.4.8), получим:

$$16m_{10} - 20m_{11} = -6h^2 g_{11}. \quad (4.3.3)$$

$$\bar{w}_{11} = -\frac{h^2}{24} (10m_{10} + 7m_{11}). \quad (4.3.4)$$

$$-20\bar{w}_{11} = -\frac{h^2}{12} (16m_{10} + 52m_{11}). \quad (4.3.5)$$

Из (4.3.3), (4.3.4) и (4.3.5) найдём:

$$\bar{w}_{11} = \frac{17}{712} h^4 g_{11}; \quad m_{10} = -\frac{61}{356} h^2 g_{11}; \quad m_{11} = \frac{29}{178} h^2 g_{11}. \quad (4.3.6)$$

Записав разностную аппроксимацию (2.2.6), (2.2.7), по уравнениям (2.3.4), (3.3.5) и учитывая краевые условия, получим:

$$f_{11} = \frac{13h^2}{60} \alpha_{11}. \quad (4.3.7)$$

$$\psi_{11} = \frac{13h^2}{60} f_{11}. \quad (4.3.8)$$

С учётом (4.3.6) получим:

$$g_{11} = \frac{712}{17h^4} w_{11}. \quad (4.3.9)$$

При учёте (4.3.1), (4.3.2), (4.3.6), (4.3.7) и (4.3.8):

$$\lambda_{11} = -\frac{8,60457k}{h^4} w_{11}. \quad (4.3.10)$$

Подставляя (4.3.9) и (4.3.10) в (2.2.3), получим:

$$\frac{712}{17h^4} w_{11} = \bar{q}_{11} - \frac{8,60457k}{h^4} w_{11}. \quad (4.3.11)$$

с учётом  $\bar{q} = 7,2$ ;  $h = 1/2$ ; и  $k = 108817,8$ .

(4.3.11) имеет вид:

$$936330,38 w_{11}^{-3} + \frac{712}{17} w_{11} - 0,45 = 0 \quad (4.3.12)$$

Решая (4.3.12) получим:

$$\bar{w}_{11} = 0,00598. \text{ Тогда } w_{11} = 0,0598 \text{ см.}$$

Используя блок-схему (Рисунок 2.1), получим  $w_{11} = 0,06 \text{ см}$  через 16 циклов итераций.

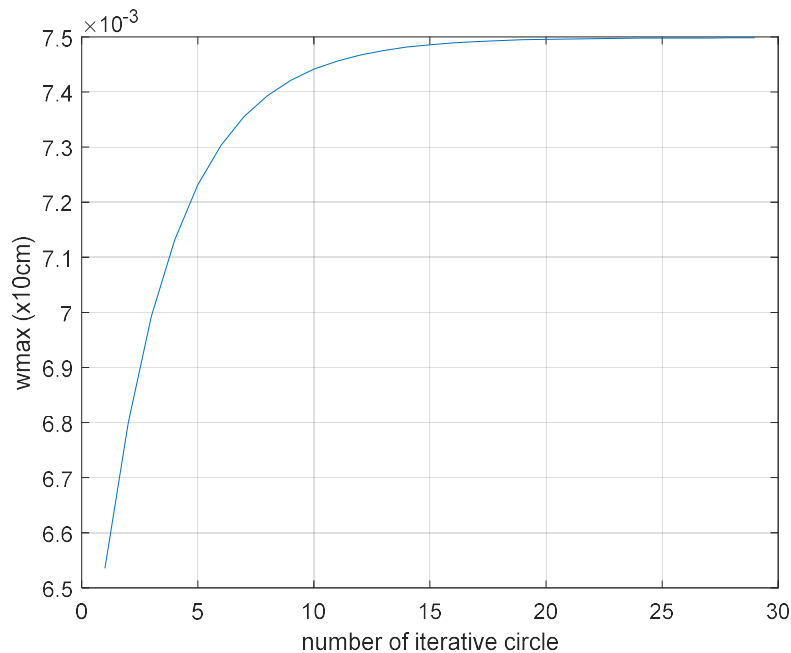
Сравним полученный результат с известным решением Вольмира [12]. Для квадратной пластинки, закреплённой по краям (кромки пластинки свободно смещаются) при  $\mu = 0,316$  определим:  $\zeta = \frac{w}{H}$  из уравнения [12] (2.149):

$$\frac{533\pi}{3200} \zeta^3 + \frac{2\pi^4}{3(1-\mu^2)} \zeta = q^*,$$

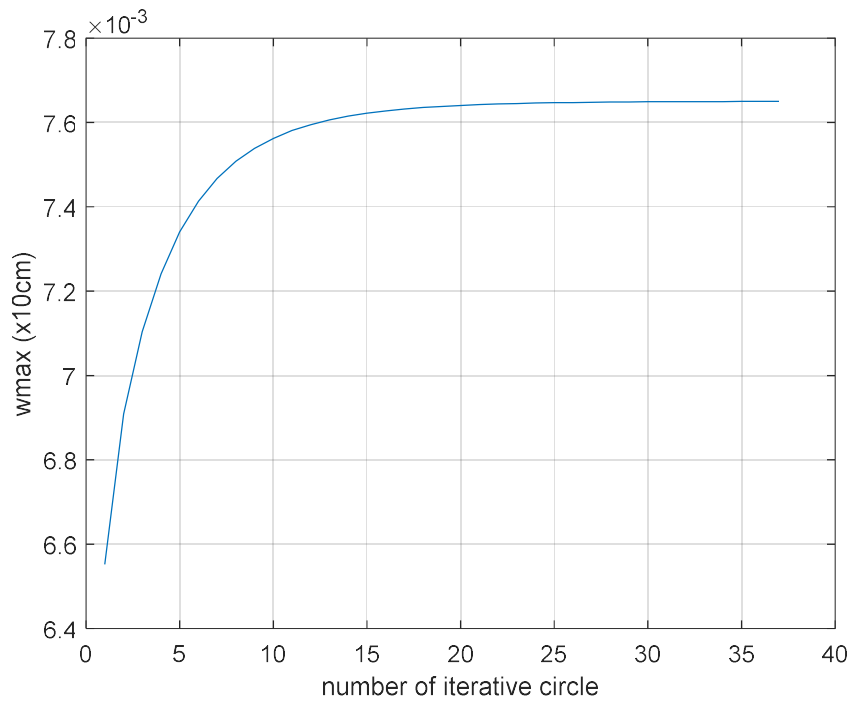
$$\text{где: } q^* = \frac{q}{E} \left( \frac{a}{H} \right)^4 (1 - \mu^2) = \frac{0,5}{0,75 \cdot 10^6} \left( \frac{10}{0,1} \right)^4 \cdot (1 - 0,316^2) = 60,01.$$

$$16,192\zeta^3 + 71,997\zeta = 60,667; \quad \zeta = 0,8075; \quad w_{\max} = \zeta H = 0,08075 \text{ см.}$$

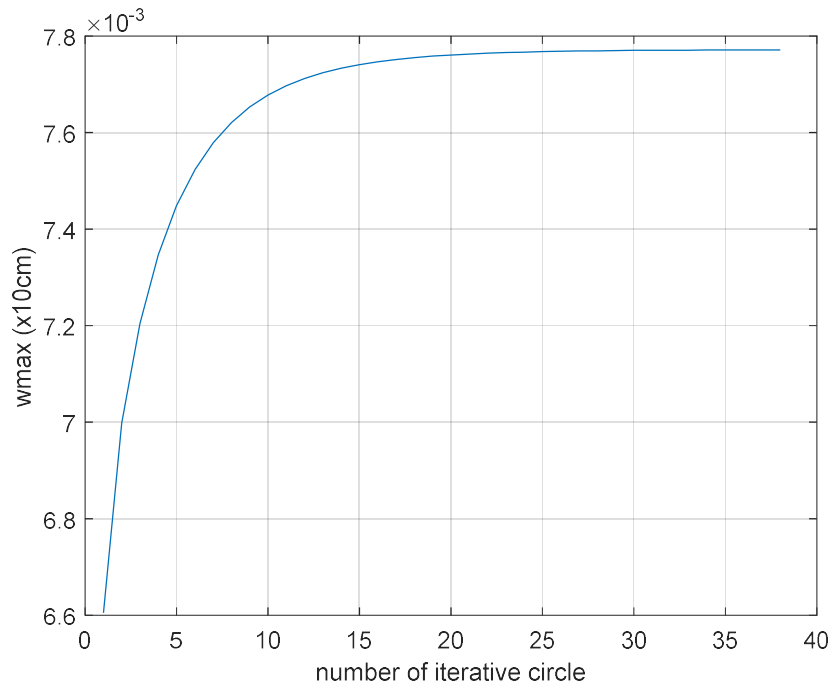
Отличие, полученного нами численного результата от аналитического, составляет 25%. Это объясняется тем, что наше решение получено на грубой, минимально возможной, расчётной сетке, при разбиении каждой стороны на два участка (*Рисунок 4.1*). Такая сетка выбрана исключительно в методических целях, для иллюстрации алгоритма. Ниже в *таблице 4.1* и *таблице 4.2* приведены результаты, полученные на нескольких вложенных одна в другую сетках. Они демонстрируют сходимость численного решения и высокую точность при использовании предлагаемой методики. Вычислительный процесс построен с использованием программы MATLAB.



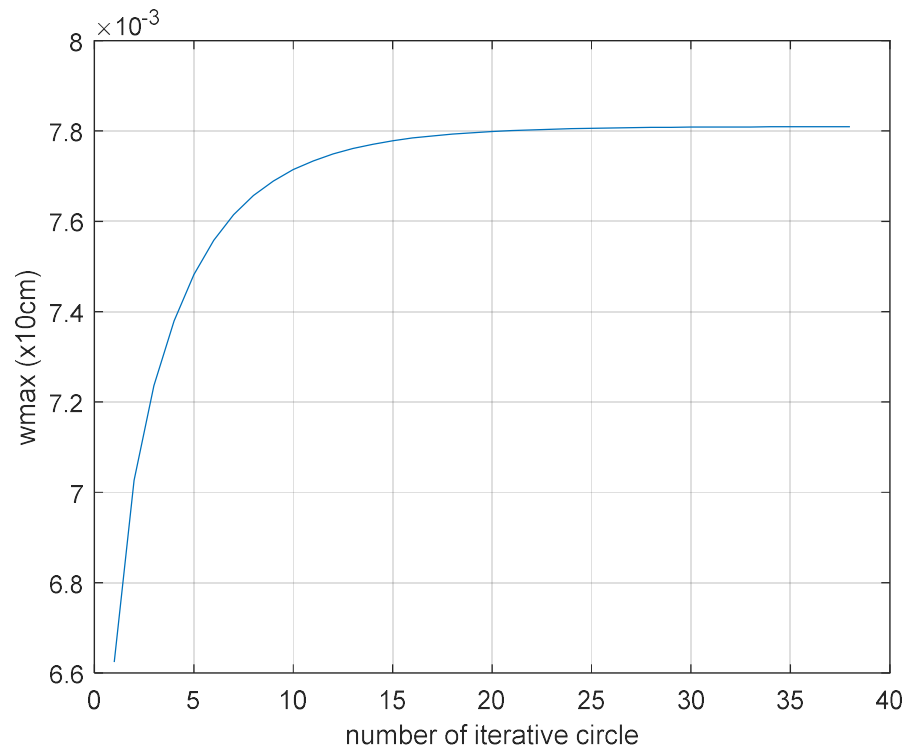
*Рисунок 4.2* График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерационного процесса при шаге  $h = 1/4$



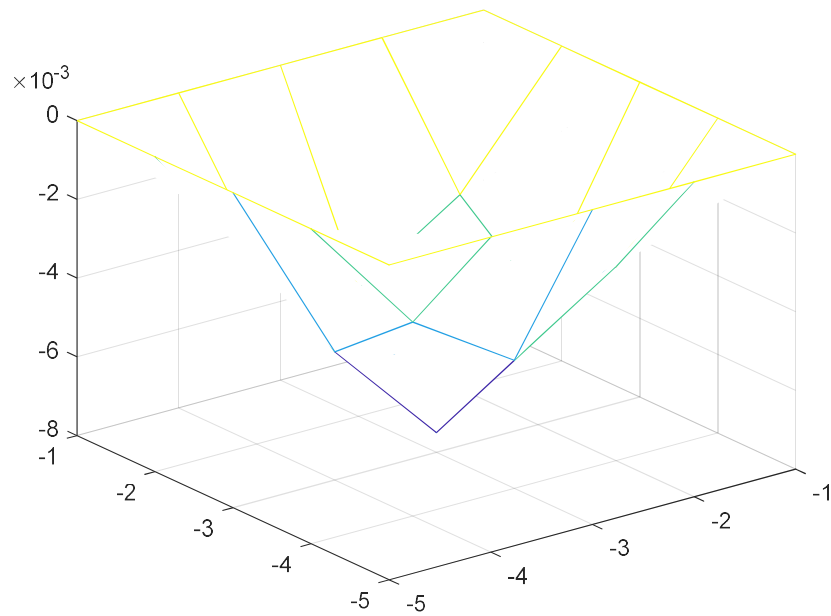
*Рисунок 4.3 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерационного процесса при шаге  $h = 1/8$*



*Рисунок 4.4 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерационного процесса при шаге  $h = 1/16$*



*Рисунок 4.5 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерационного процесса при шаге  $h = 1/32$*



*Рисунок 4.6 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шагах:  $h = 1/4$*

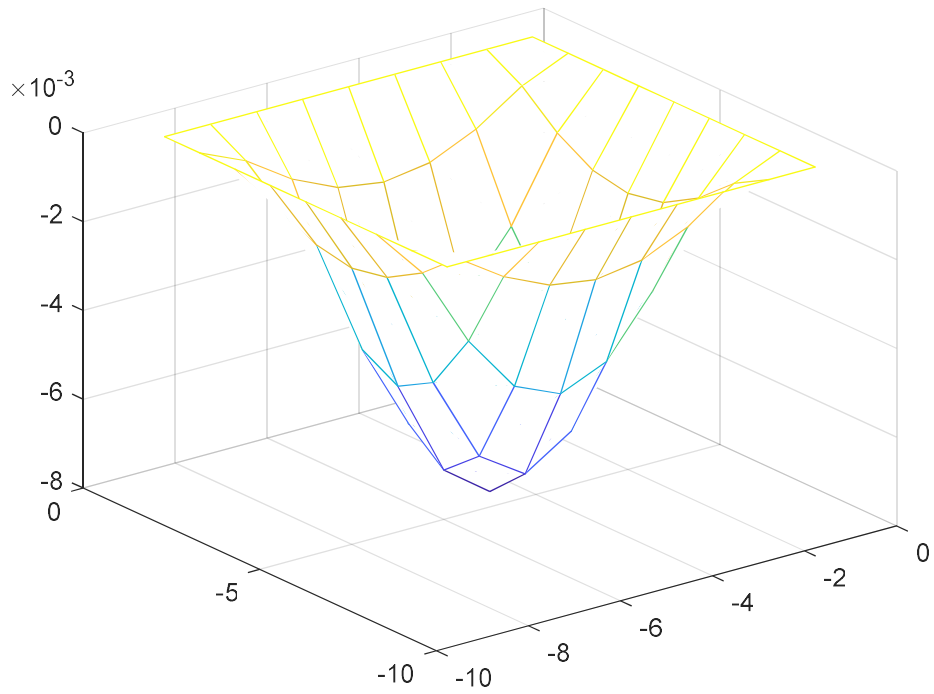


Рисунок 4.7 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шагах:  $h = 1/8$

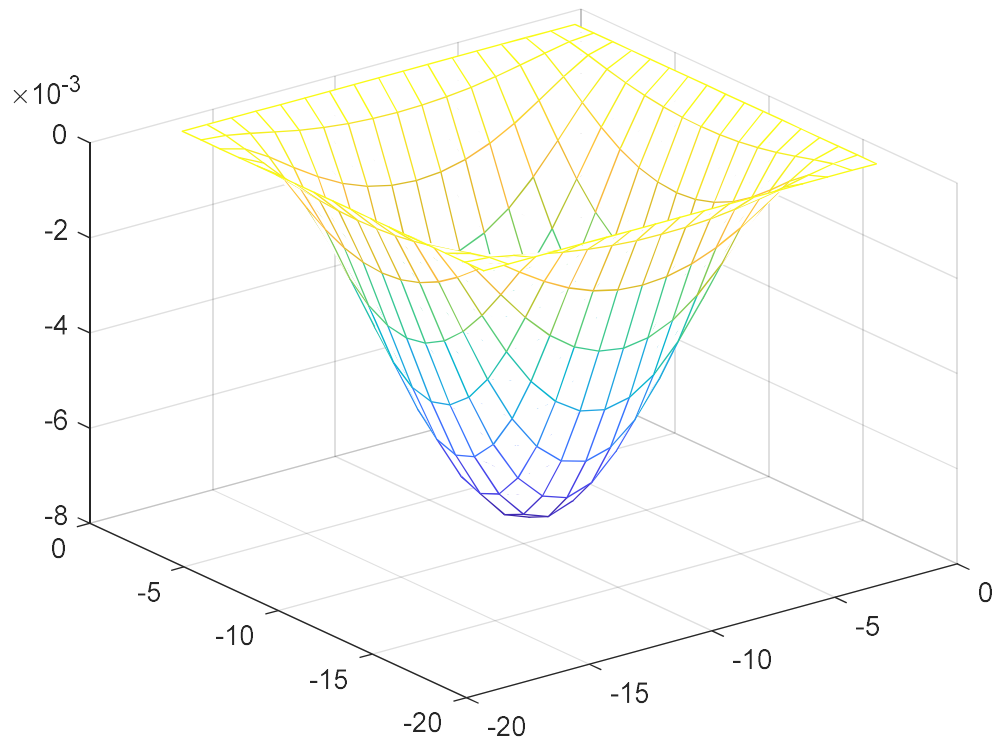


Рисунок 4.8 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шагах:  $h = 1/16$

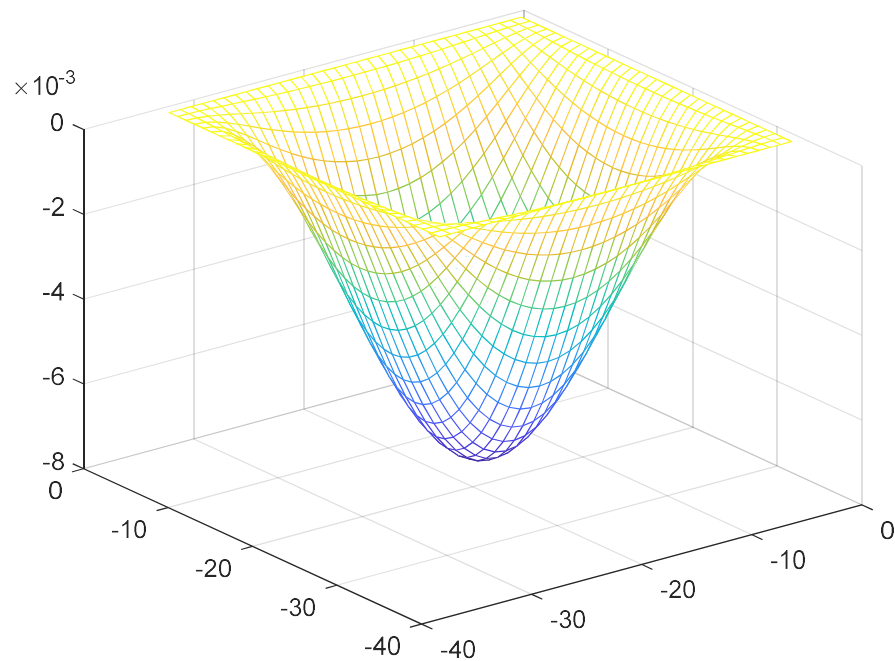


Рисунок 4.9 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шагах:  $h = 1/32$

Таблица 4.1 - Максимальный прогиб и сравнение с результатом А.С Вольмира при разных шагах расчетной сетки.

| $h$  | $h = 1/4$ | $h = 1/8$ | $h = 1/16$ | $h = 1/32$ | $h = 1/64$ |
|--|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| Номер цикла итерации   | 29        | 37        | 38         | 38         | 26         |
| Максимальные значения прогибы (см)   | 0,075     | 0,0766    | 0,0778     | 0,0782     | 0,0782     |
| Расхождение максимальных прогибов по сравнению с результатом Вольмира<br>$w_{\max} = 0,08075$ см | 7,12%     | 5,39%     | 3,65%      | 3,28%      | 3,28%      |

В таблице 4.2 приведено сравнение результатов расчета пластины в геометрически нелинейной постановке с привлечением разностных уравнений МПА и обобщенных разностных уравнений МКР. Последние обладают меньшей точностью, но значительно проще при записи. Видно, что при шаге  $h=1/32$  результаты по МПА почти совпадают с результатами по МКР (погрешность меньше 1%).



Таблица 4.2 - Сравнение результатов, полученных с использованием разностных уравнений МПА и обобщенных разностных уравнений МКР при разных шагах сетки.

| Шаг $h$ | Решение по МПА |                        |                        |                        | Решение по МКР    |                        |                        |                        |
|---------|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|         | $W_{max}$ (см) | $M_{11}(x)$<br>(кг.см) | $M_{10}(y)$<br>(кг.см) | $M_{10}(x)$<br>(кг.см) | $W_{max}$<br>(см) | $M_{11}(x)$<br>(кг.см) | $M_{10}(y)$<br>(кг.см) | $M_{10}(x)$<br>(кг.см) |
| 1/4     | 0,075          | 0,855                  | -0,680                 | -2,153                 | 0,099             | 0,853                  | -0,491                 | -1,552                 |
| 1/8     | 0,0764         | 0,904                  | -0,728                 | -2,304                 | 0,085             | 0,908                  | -0,665                 | -2,106                 |
| 1/16    | 0,0778         | 0,923                  | -0,738                 | -2,334                 | 0,0802            | 0,92                   | -0,721                 | -2,283                 |
| 1/32    | 0,0782         | 0,928                  | -0,740                 | -2,342                 | 0,0788            | 0,929                  | -0,736                 | -2,329                 |
| 1/64    | 0,0782         | 0,9297                 | -0,7408                | -2,344                 | 0,0783            | 0,9298                 | -0,7398                | -2,341                 |

Таблица 4.3 - Сравнение результатов расчета квадратной заземленной пластинки по линейному подходу и нелинейному подходу

| Нагрузка<br>$q$ (кг/см <sup>2</sup> ) | Линейный подход ( $h=1/32$ ) | Нелинейный подход ( $h=1/32$ ) |
|---------------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
|                                       | $W_{max}$ (см)               | $W_{max}$ (см)                 |
| 0                                     | 0                            | 0                              |
| 0.1                                   | 0.018                        | 0.0181                         |
| 0.2                                   | 0.036                        | 0.03524                        |
| 0.3                                   | 0.054                        | 0.051                          |
| 0.4                                   | 0.072                        | 0.0653                         |
| 0.5                                   | 0.09                         | 0.0781                         |
| 0.6                                   | 0.108                        | 0.0898                         |
| 0.7                                   | 0.126                        | 0.1004                         |
| 0.8                                   | 0.144                        | 0.1101                         |
| 0.9                                   | 0.162                        | 0.1191                         |
| 1                                     | 0.18                         | 0.1275                         |

В таблицу 4.3 сведены результаты расчета квадратной шарнирно опертой пластинки в линейной и геометрически нелинейной постановке. По полученным результатам построены графики максимального прогиба в зависимости от интенсивности приложенной нагрузки для решений задачи в линейной и

нелинейной постановках. Графики качественно совпадают с опубликованными в [12,198].

Анализируя приведенные на рисунке 4.10 графики, мы видим, что при заданных жесткостных характеристиках пластины, ее работа на изгиб удовлетворительно описывается линейной теорией вплоть до достижения прогибов 0,005 длины стороны. В указанных пределах значения прогибов по линейной и геометрически нелинейной теориям почти совпадают.

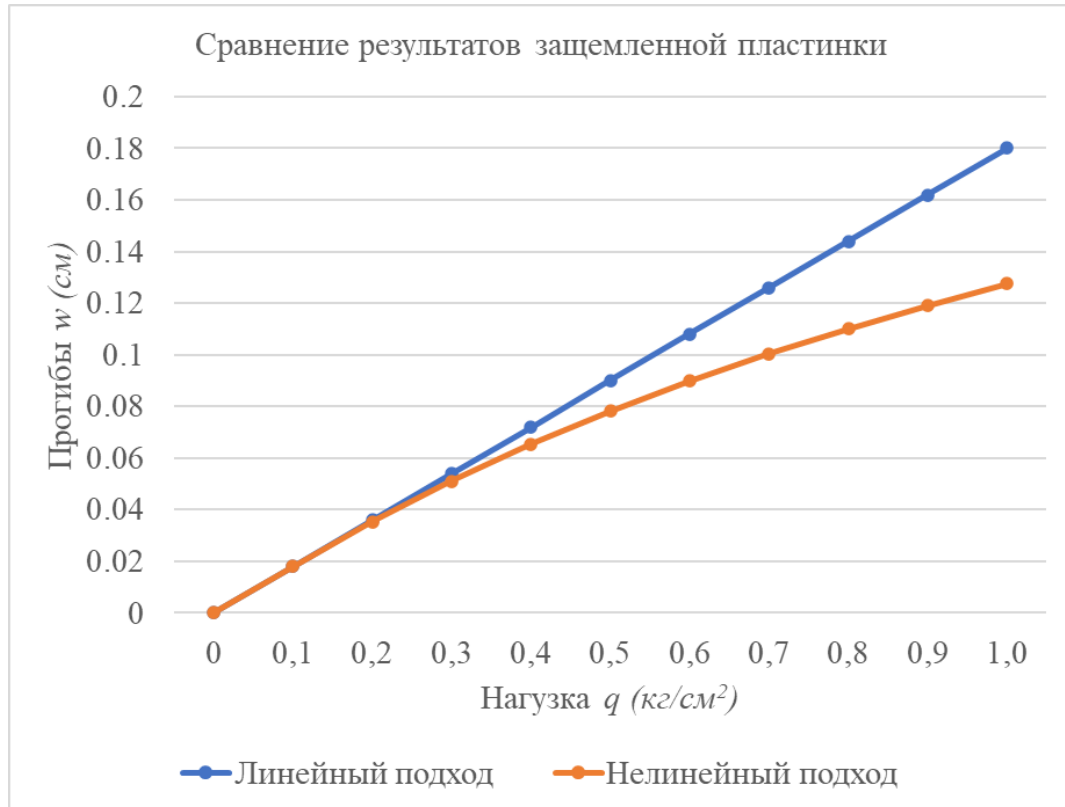


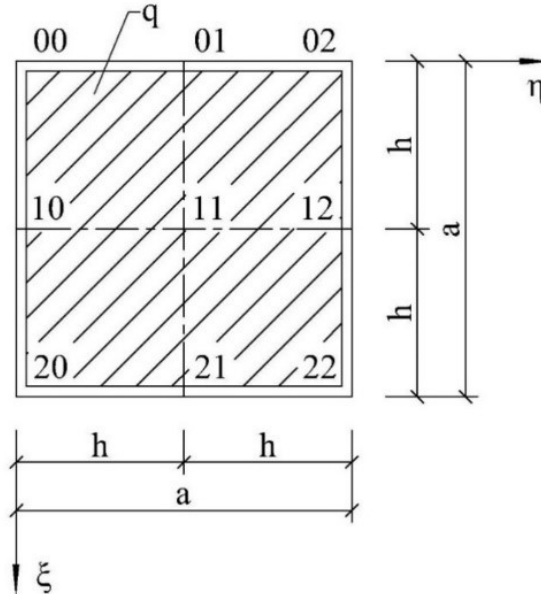
Рисунок 4.10. Результаты расчета гибкой пластины в линейной и геометрически нелинейной постановке.

#### 4.3.2. Расчёт шарнирно опертой гибкой квадратной пластинки со свободно сближающимися краями, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой.

Рассмотрим предыдущий пример, изменив краевые условия. Будем считать, что все края шарнирно оперты и имеют возможность свободно сближаться. Все остальные параметры остаются прежними: толщина пластинки  $H=0,1$  см, сторона

$a=10\text{см}$ , нагрузка  $q=0,5\text{кг/см}^2$ , модуль упругости  $E=0,75\cdot 10^6\text{кг/см}^2$ , коэффициент Пуассона  $\mu=0,316$  (Рисунок 4.11).

Решение задачи получим с использованием составленной программы в математическом пакете MATLAB.



*Рисунок 4.11. Квадратная шарнирно опёртая пластинка со свободно сближающимися краями*

В таблице 4.4 приведены безразмерные значения максимального прогиба и изгибающего момента, полученные двумя численными методами. В первом случае с использованием разностных уравнений МПА, во втором случае с привлечением обобщенных разностных уравнений МКР. Сравнение результатов, полученных этими численными методами, показывает, что при отсутствии таких разрывных параметров как полосовые нагрузки, скачкообразное изменение жесткости (конечные разрывы равномерно распределенной нагрузки учитываются обоими методами) и при достаточно частой сетке они практически совпадают. Т.е., при указанном отсутствии разрывов, обобщенные разностные уравнения МКР обеспечивают ту же точность, что и уравнения МПА. Кроме того, оба метода демонстрируют быструю сходимость решения на вложенных одна в другую расчетных сетках. Погрешность численного решения при сравнении с аналитическим [12] составляет  $\Delta = 5,86\%$ .

Таблица 4.4. Результаты расчета шарнирно опертой пластины (Рисунок 4.11).

| Шаг $h$ | Решение по МПА |                        | Решение по МКР |                        | Аналитическое решение [12] |
|---------|----------------|------------------------|----------------|------------------------|----------------------------|
|         | $W_{max}$ (см) | $M_{II}(x)$<br>(кг.см) | $W_{max}$ (см) | $M_{II}(x)$<br>(кг.см) |                            |
| 1/4     | 0,133          | 0,936                  | 0,134          | 0,918                  | 0,1519                     |
| 1/8     | 0,141          | 0,982                  | 0,141          | 0,976                  |                            |
| 1/16    | 0,143          | 0,999                  | 0,142          | 0,998                  |                            |
| 1/32    | 0,143          | 1,003                  | 0,143          | 1,003                  |                            |
| 1/64    | 0,142          | 1,008                  | 0,143          | 1,004                  |                            |

В таблице 4.5 и на рисунке 4.1.12 мы привели сравнение решения задачи (по прогибам) в линейной и нелинейной постановках.

Таблица 4.5. Сравнение результатов расчета квадратной шарнирно опертой пластинки по линейному подходу и нелинейному подходу.

| Нагрузка<br>$q$ (кг/см <sup>2</sup> ) | Линейный подход ( $h=1/32$ ) | Нелинейный подход ( $h=1/32$ ) |
|---------------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
|                                       | $W_{max}$ (см)               | $W_{max}$ (см)                 |
| 0                                     | 0                            | 0                              |
| 0.1                                   | 0.058                        | 0.052                          |
| 0.2                                   | 0.116                        | 0.087                          |
| 0.3                                   | 0.174                        | 0.111                          |
| 0.4                                   | 0.232                        | 0.129                          |
| 0.5                                   | 0.29                         | 0.143                          |
| 0.6                                   | 0.348                        | 0.156                          |
| 0.7                                   | 0.406                        | 0.1678                         |
| 0.8                                   | 0.464                        | 0.179                          |
| 0.9                                   | 0.522                        | 0.1887                         |
| 1                                     | 0.58                         | 0.198                          |

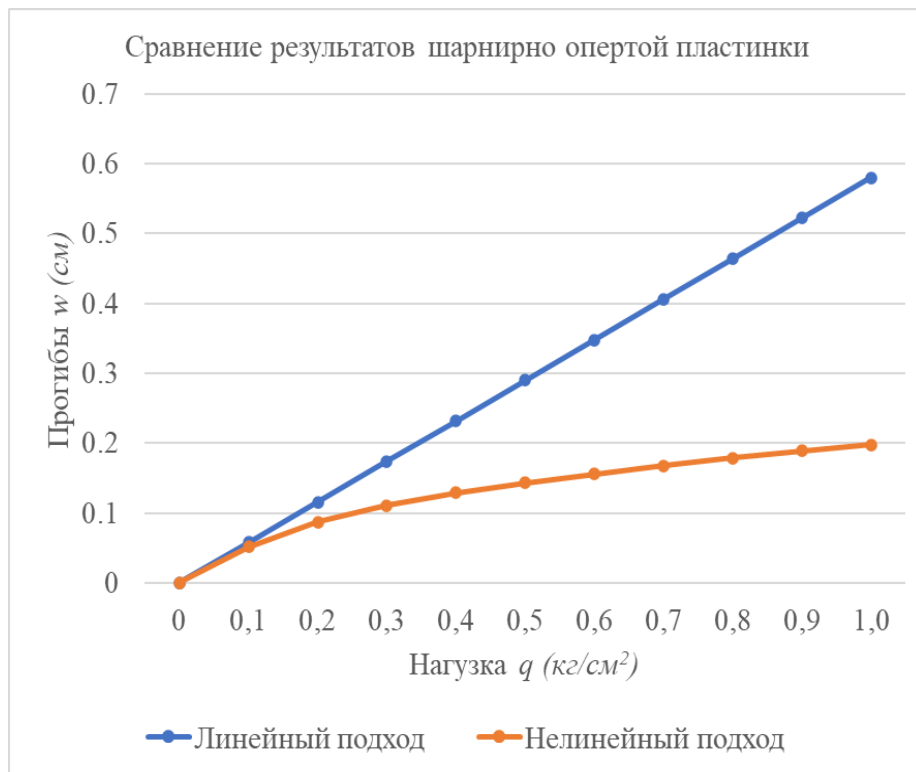


Рисунок 4.12- Результаты расчета гибкой пластинки в линейной и геометрически нелинейной постановке.

#### 4.3.3. Квадратная пластинка с двумя шарнирными и двумя заделанными сближающимися краями.

По-прежнему будем считать, что толщина пластинки  $H=0,1$  см, сторона  $a=10$  см, нагрузка  $q=0,5$  кг/см<sup>2</sup>, модуль упругости  $E=0,75 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. Для иллюстрации возможностей алгоритма рассмотрим вариант, где стороны пластинки имеют различные краевые условия: две противоположные стороны жестко защемлены, а оставшиеся две - шарнирно оперты (Рисунок 4.13).

Результаты расчета по МПА и МКР сведены в табл. 4.6. Отметим, что максимальные значения прогибов больше, чем в задаче параграфа 4.3.1, где рассматривалась пластинка с защемленными краями и меньше, чем значения прогибов в шарнирно опертой пластинке из предыдущего параграфа, что является качественной оценкой правильности полученного решения.

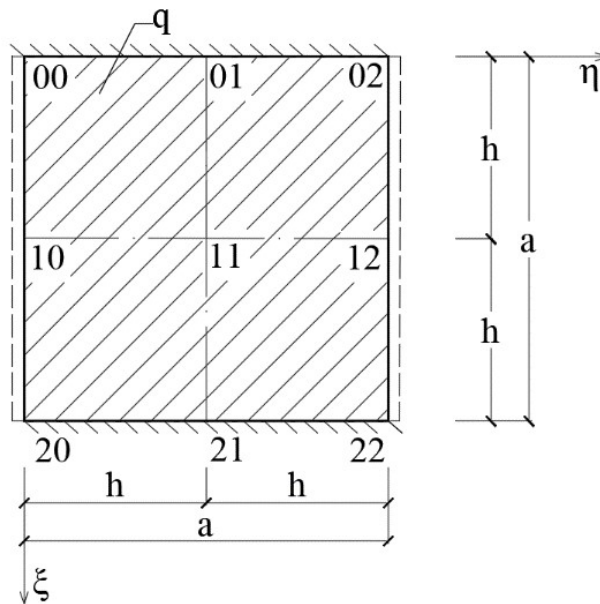


Рисунок 4.13- Квадратная пластинка с двумя шарнирными и двумя заделанными сближающимися краями.

Таблица 4.6- Результаты расчета пластины по схеме рис. 4.1.3.

| Шаг $h$ | Решение по МПА    |                        |                        |                        |                        | Решение по МКР    |                        |                        |                        |                        |
|---------|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|         | $W_{max}$<br>(см) | $M_{11}(y)$<br>(кг.см) | $M_{11}(x)$<br>(кг.см) | $M_{01}(y)$<br>(кг.см) | $M_{01}(x)$<br>(кг.см) | $W_{max}$<br>(см) | $M_{11}(y)$<br>(кг.см) | $M_{11}(x)$<br>(кг.см) | $M_{01}(y)$<br>(кг.см) | $M_{01}(x)$<br>(кг.см) |
| 1/4     | 0,097             | 0,771                  | 1,045                  | -0,832                 | -2,634                 | 0,115             | 0,837                  | 0,946                  | -0,569                 | -1,8                   |
| 1/8     | 0,102             | 0,806                  | 1,122                  | -0,895                 | -2,832                 | 0,109             | 0,834                  | 0,109                  | -0,816                 | -2,581                 |
| 1/16    | 0,1037            | 0,821                  | 1,145                  | -0,906                 | -2,867                 | 0,106             | 0,829                  | 1,135                  | -0,887                 | -2,807                 |
| 1/32    | 0,1043            | 0,825                  | 1,151                  | -0,909                 | -2,876                 | 0,1048            | 0,827                  | 1,149                  | -0,904                 | -2,862                 |
| 1/64    | 0,10435           | 0,826                  | 1,153                  | -0,9097                | -2,8787                | 0,1045            | 0,827                  | 1,152                  | -0,9085                | -2,875                 |

#### 4.3.4. Расчёт гибкой квадратной пластинки, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой на половине пролета.

Рассмотрим пример расчета пластины на действие кусочно постоянной распределенной нагрузки. Характеристики пластины примем, как в примере параграфа 4.3.1. Будем считать, что равномерно распределенная нагрузка действует только на половине площади поверхности пластины. На рисунке. 4.14 нагруженная часть обозначена штриховкой.

Толщина пластинки  $H=0,1$  см, сторона  $a=10$  см, нагрузка  $q=0,5$  кг/см<sup>2</sup>, модуль упругости  $E=0,75 \cdot 10^6$  кг<sup>2</sup>/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu=0,316$ .

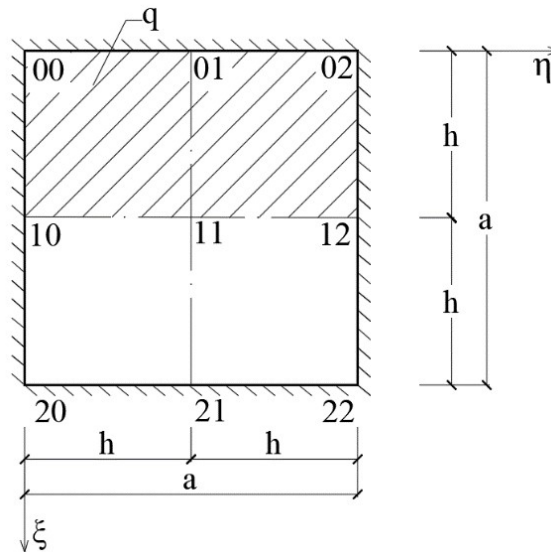


Рисунок 4.14 - Квадратная защемлённая пластина со свободно сближающимися краями.

В этом случае параметр безразмерной распределенной нагрузки в уравнении (2.3.2) для точки 11 будет учтен следующим образом:

$$m_{00} + 4m_{01} + m_{02} + \\ + 4m_{10} - 20m_{11} + 4m_{12} + \\ + m_{20} + 4m_{21} + m_{22} = -\frac{3}{2}h^2 \left( {}^I g_{11} + {}^{III} g_{11} \right).$$

В таблице 4.7 приведены результаты расчета рассматриваемой пластины. Для иллюстрации быстрой сходимости решения приводим здесь результаты на нескольких вложенных одна в другую сетках. Решение получено с привлечением разностных уравнений МПА и МКР. Нижний правый индекс у искомой величины обозначает адрес точки (см рис 4.14), для которой получено данное значение.

На рисунках 4.15 и 4.16 приведены поверхности значений изгибающих моментов по направлениям  $y$  и  $x$  соответственно. На рисунке 4.17 представлена поверхность перемещений точек пластины после деформирования.

На рисунке 4.18 приведены эпюры моментов по линии, проходящей через точки 01-11-21 (см. рис 4.14), и по линии проходящей через точки 10-11-12.

Таблица 4.7- Результаты расчета квадратной защемленной пластины со схемой нагружения по рис. 4.14.

| Шаг<br>$h$ | Решение по МПА   |                        |                        |                        |                        | Решение по МКР   |                        |                        |                        |                        |
|------------|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|            | $W_{11}$<br>(см) | $M_{11}(x)$<br>(кг.см) | $M_{11}(y)$<br>(кг.см) | $M_{01}(y)$<br>(кг.см) | $M_{01}(x)$<br>(кг.см) | $W_{11}$<br>(см) | $M_{11}(x)$<br>(кг.см) | $M_{11}(y)$<br>(кг.см) | $M_{01}(x)$<br>(кг.см) | $M_{01}(y)$<br>(кг.см) |
| 1/4        | 0,0387           | 0,5918                 | 0,5826                 | -1,844                 | -0,583                 | 0,058            | 0,5644                 | 0,5531                 | -1,222                 | -0,386                 |
| 1/8        | 0,0422           | 0,5572                 | 0,5512                 | -1,925                 | -0,608                 | 0,048            | 0,5493                 | 0,5436                 | -1,718                 | -0,543                 |
| 1/16       | 0,0429           | 0,5465                 | 0,5425                 | -1,931                 | -0,610                 | 0,0444           | 0,5443                 | 0,5404                 | -1,878                 | -0,593                 |
| 1/32       | 0,0431           | 0,5436                 | 0,5436                 | -1,933                 | -0,611                 | 0,0434           | 0,5430                 | 0,5397                 | -1,919                 | -0,606                 |
| 1/64       | 0,0431           | 0,5398                 | 0,5429                 | -1,9331                | -0,6108                |                  |                        |                        |                        |                        |

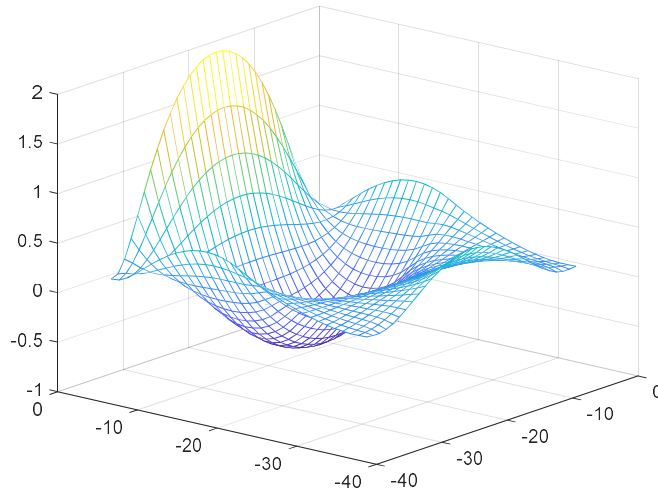


Рисунок 4.15 - Поверхность моментов (кг.см)  $M(y)$  при  $h=1/32$ .

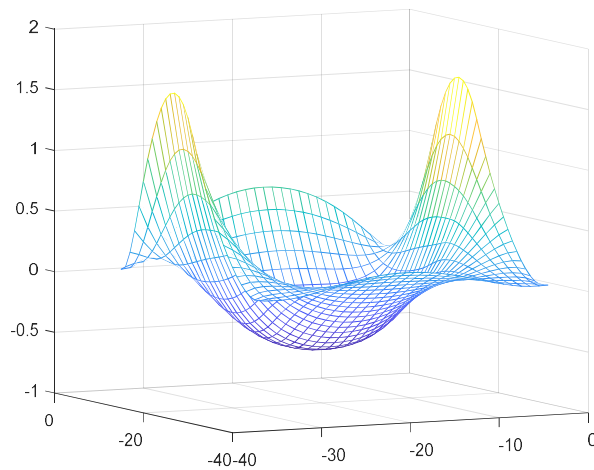


Рисунок 4.16 - Поверхность моментов (кг.см)  $M(x)$  при  $h=1/32$ .



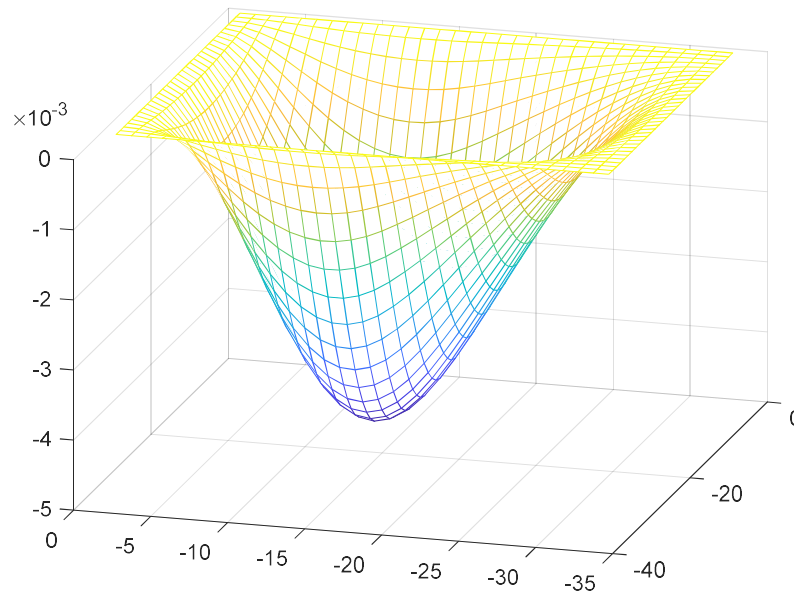
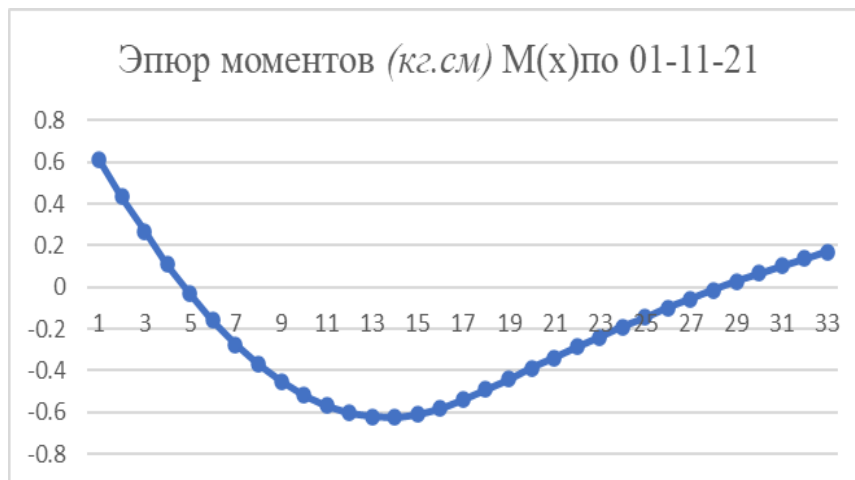
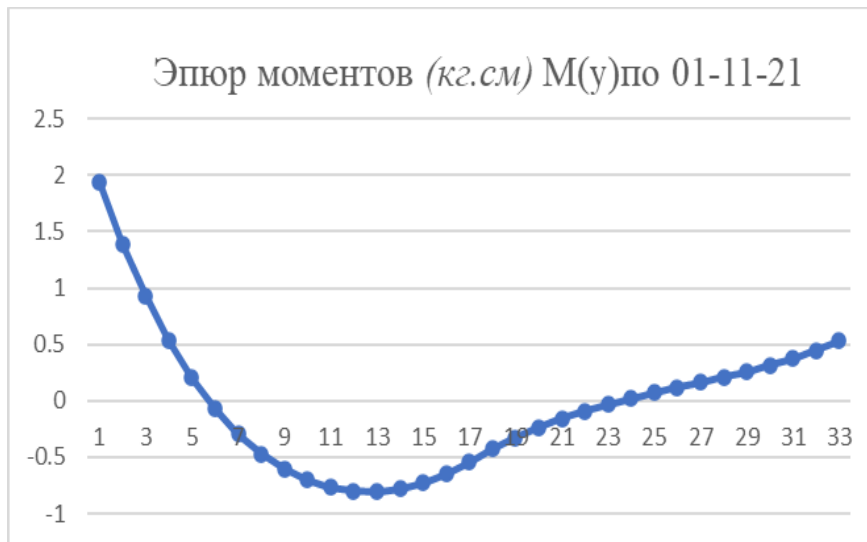


Рисунок 4.17 - Поверхность прогибов (см) при  $h=1/32$ .



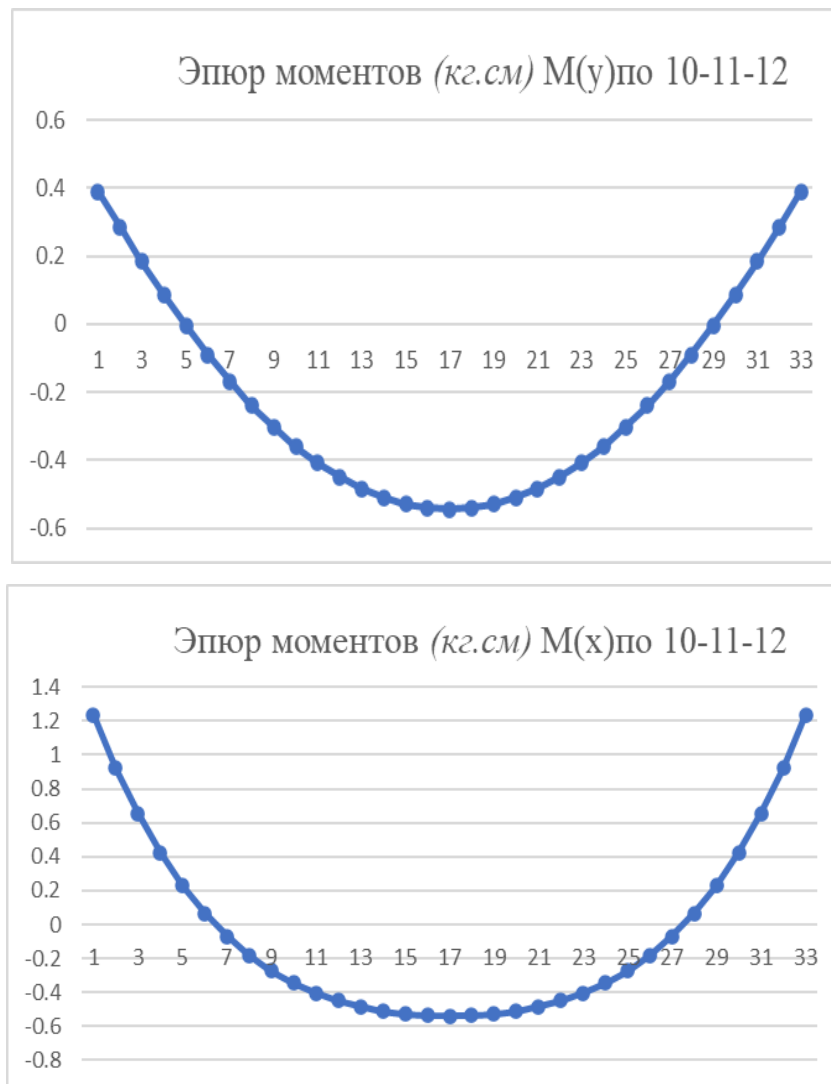


Рисунок 4.18 - Эпюры изгибающих моментов при  $h=1/32$  по линиям 01-11-21 и 10-11-12.

**4.3.5. Расчёт гибкой квадратной защемлённой пластинки со свободно сближающимися краям, половина площади которой загружена распределённой нагрузкой одной интенсивности, а вторая половина другой интенсивности.**

Характеристики пластины оставим прежними. Изменим характер нагружения. На одной половине пластины приложим распределённую нагрузку значения  $q$ , а на другой половине –  $2q$  (Рисунок 4.19).

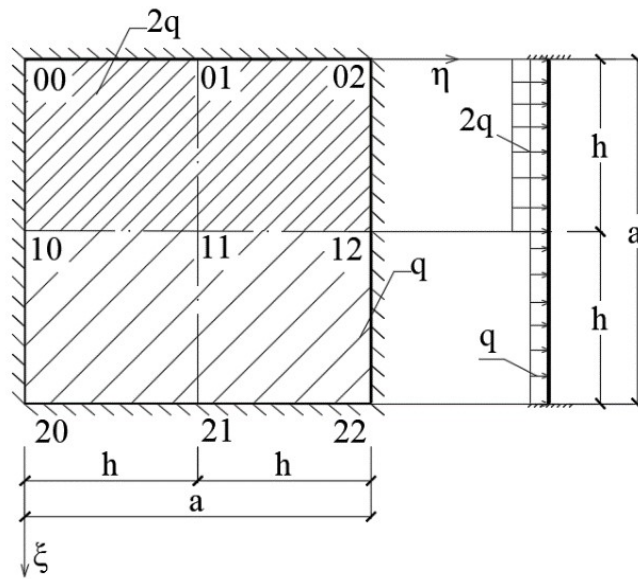


Рисунок 4.19 - Гибкая квадратная защемлённая по контуру пластина.

Таблица 4.8- Значения максимального прогиба в зависимости от шага расчетной сетки.

| $h$                  | $h=1/4$ | $h=1/8$ | $h=1/16$ | $h=1/32$ | $h=1/64$ |
|----------------------|---------|---------|----------|----------|----------|
| Номер цикла итерации | 41      | 66      | 62       | 66       | 46       |
| Прогиб точки 11 (см) | 0,0962  | 0,095   | 0,0963   | 0,0969   | 0,097    |

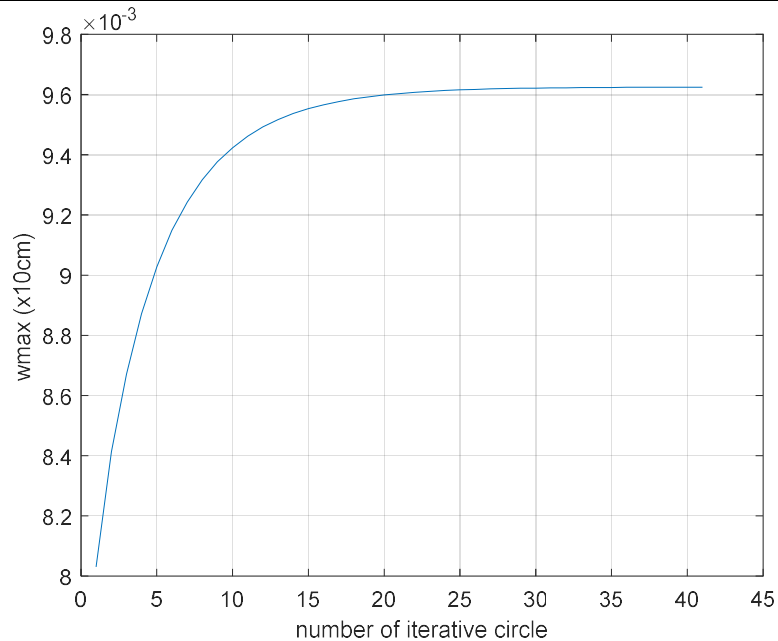


Рисунок 4.20 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерации при шаге  $h=1/4$

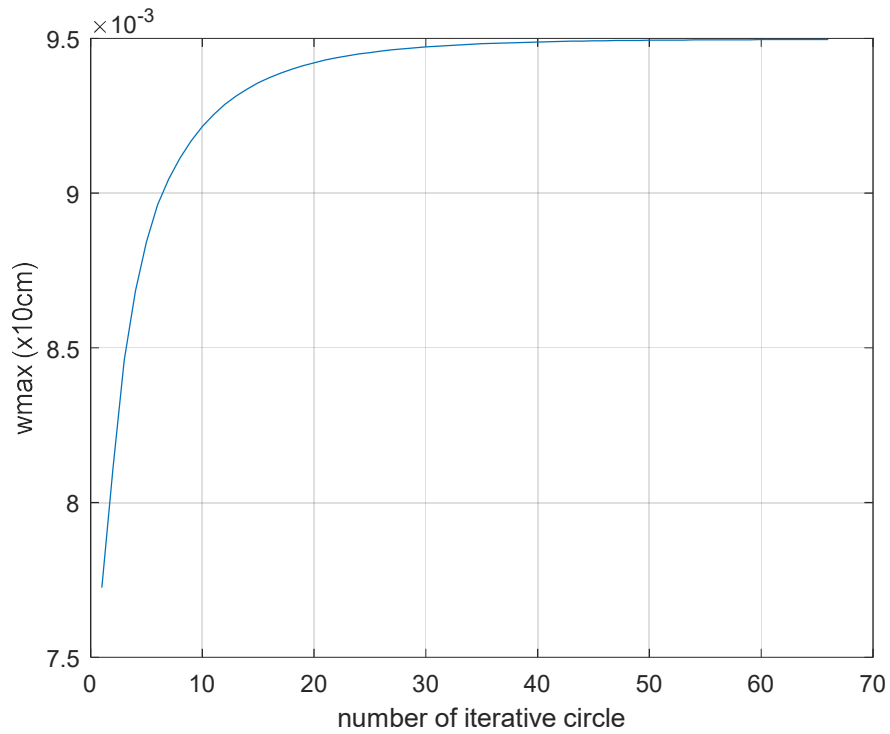


Рисунок 4.21 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерации при шаге  $h = 1/8$

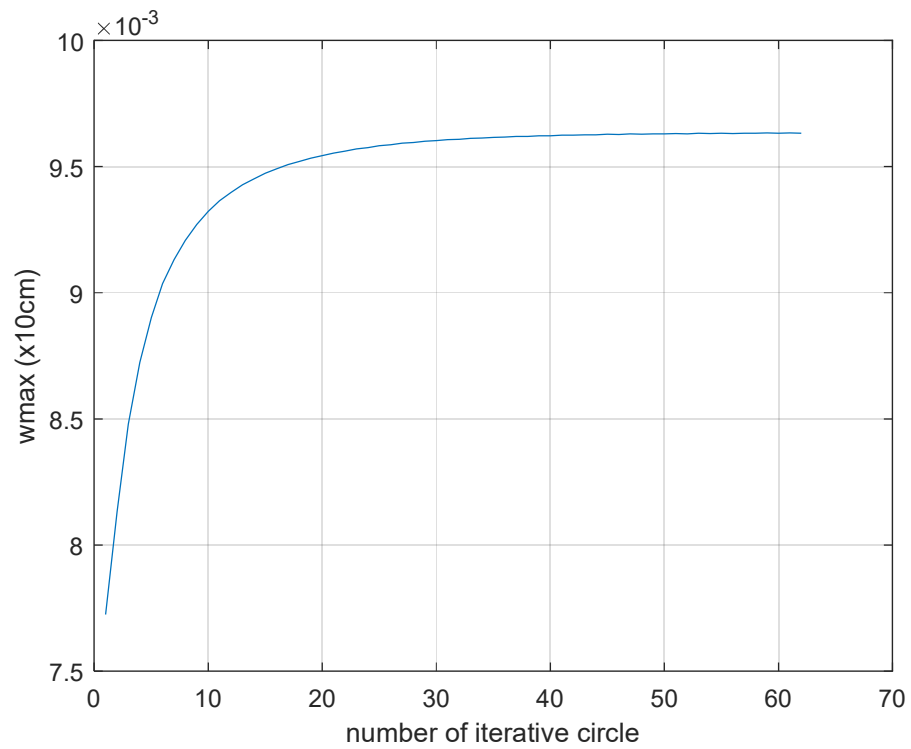
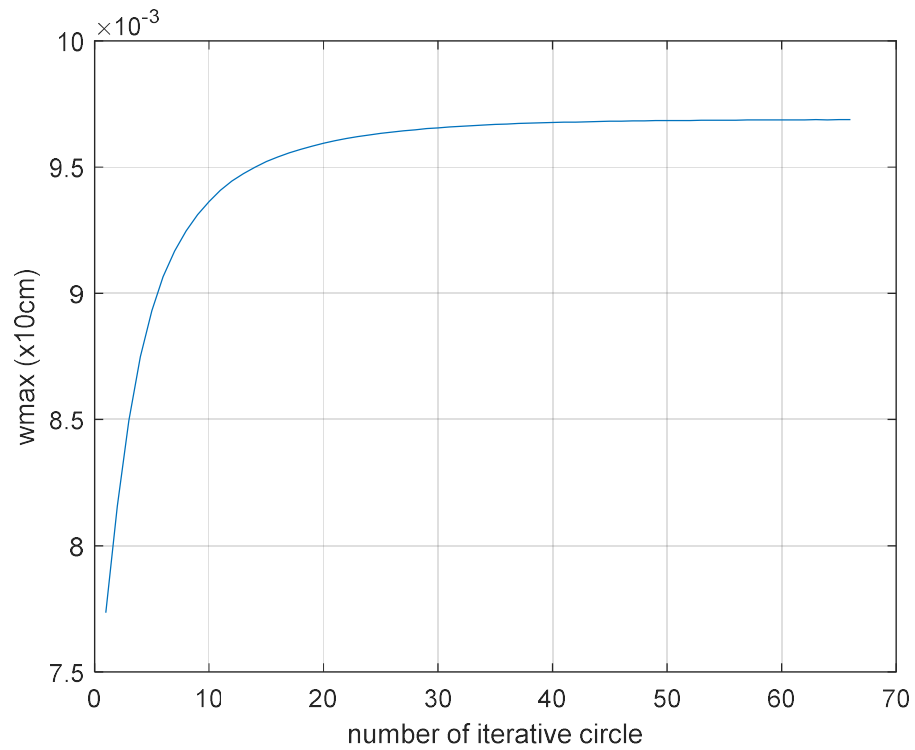
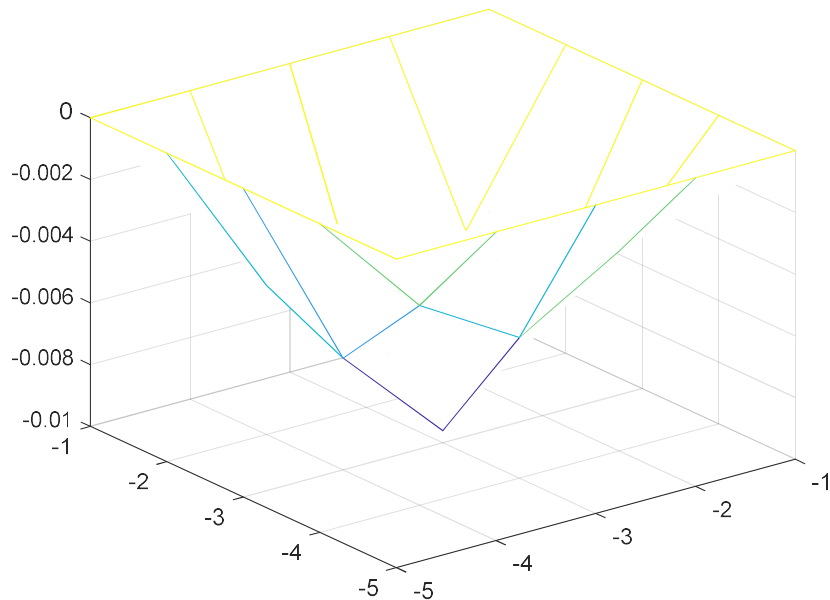


Рисунок 4.22 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерации при шаге  $h = 1/16$



*Рисунок 4.23 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерации при шаге  $h = 1/32$*

Скорость приближения искомого значения прогиба точки к установившемуся значению в итерационном процессе, в зависимости от числа итераций, проиллюстрирована графиками на рисунках 4.20 – 4.23. На каждом из этих рисунков графики построены для определенного шага расчетной сетки.



*Рисунок 4.24 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шаге  $h = 1/4$*

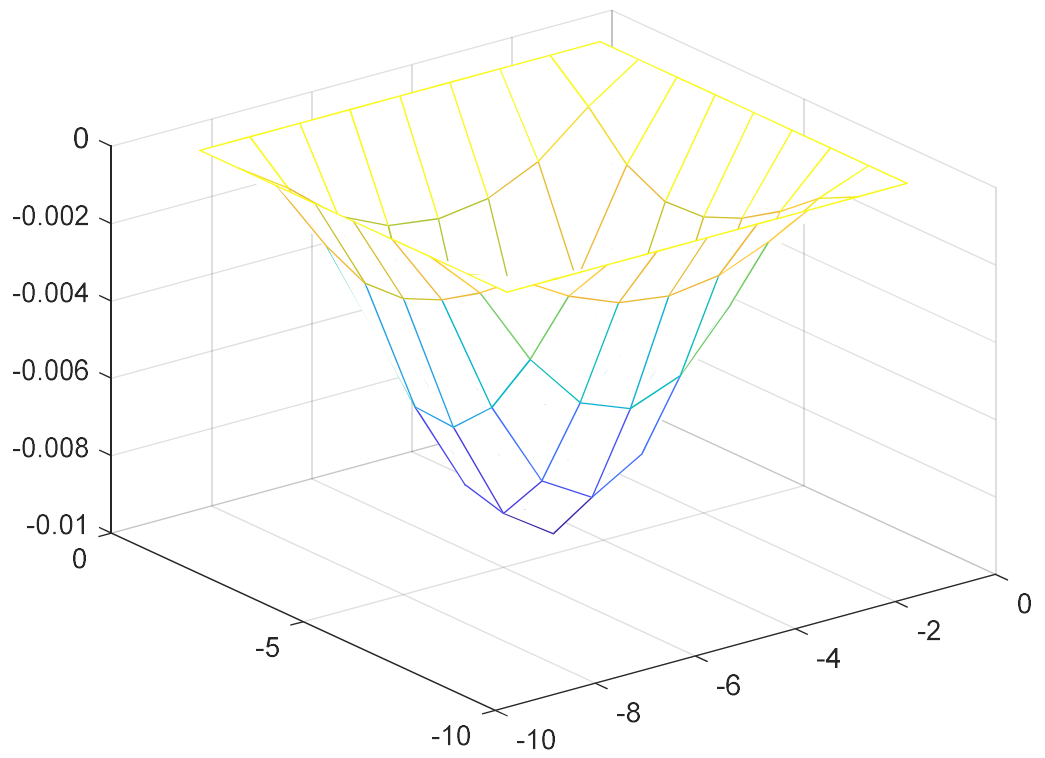


Рисунок 4.25 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шаге  $h = 1/8$

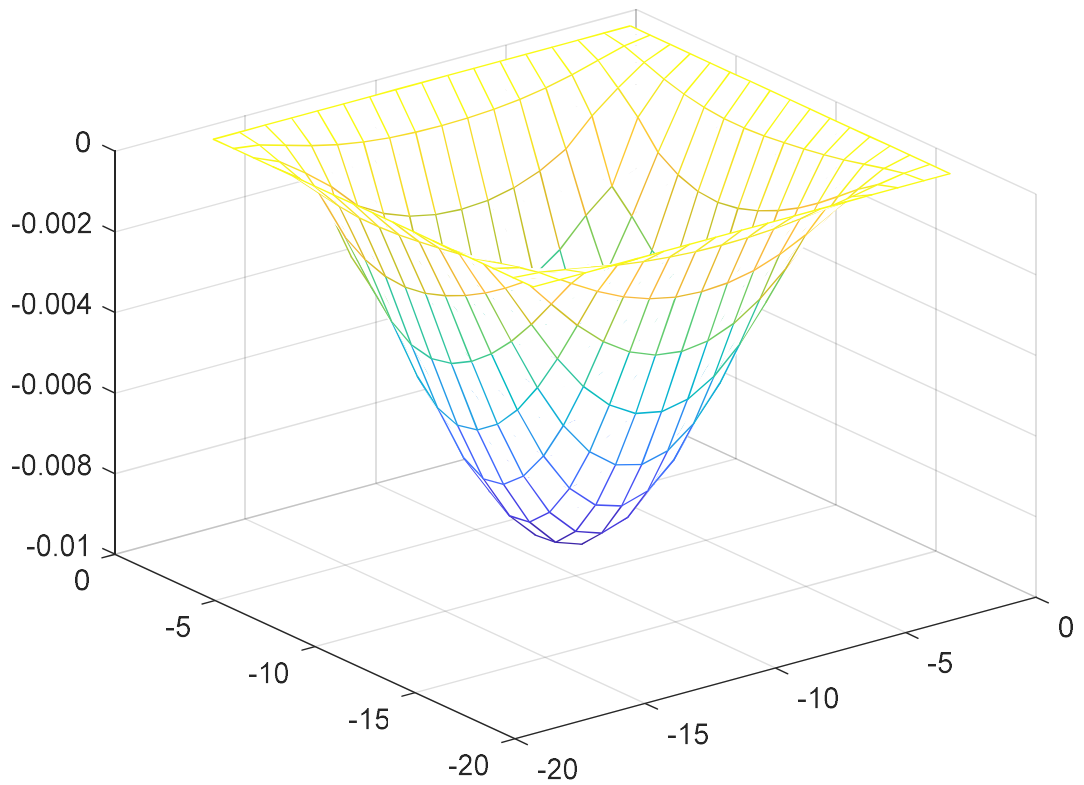


Рисунок 4.26 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шаге  $h = 1/16$

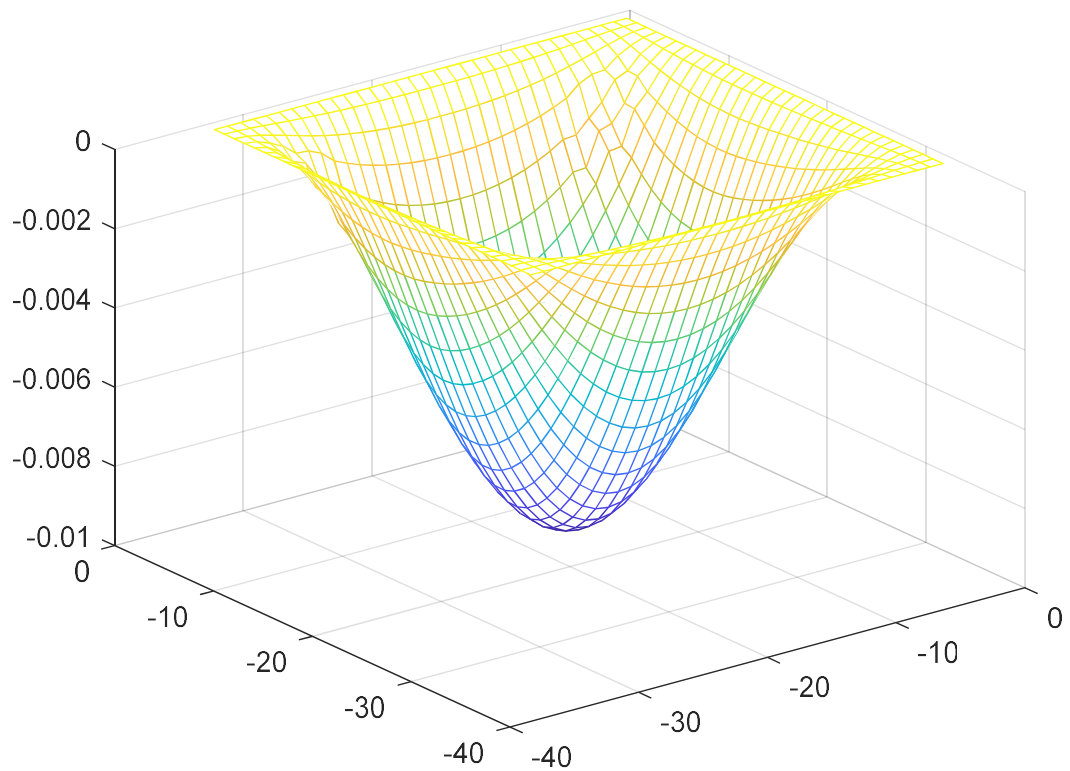


Рисунок 4.27 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шаге  $h = 1 / 32$

На рисунках 4.24 – 4.27 приведены изображения поверхности деформируемой пластины при разных шагах расчетной сетки. Эпюры прогибов по центральным линиям (проходящим через точку в центре пластины) представлены на рис 4.28.

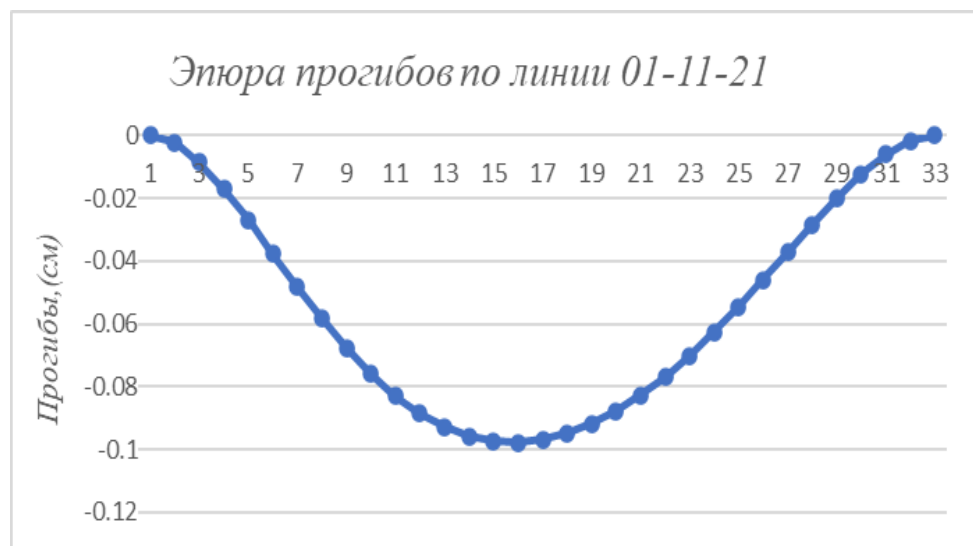




Рисунок 4.28 Этюры прогибов (см) по линиям при шаге  $h = 1/32$

На рисунках 4.29 и 4.30 приведены поверхности распределения значений изгибающих моментов (по направлениям осей  $x$  и  $y$ ) по площади пластины. Значения изгибающих моментов в точках, принадлежащих осевым линиям, приведены на рисунке 4.31.

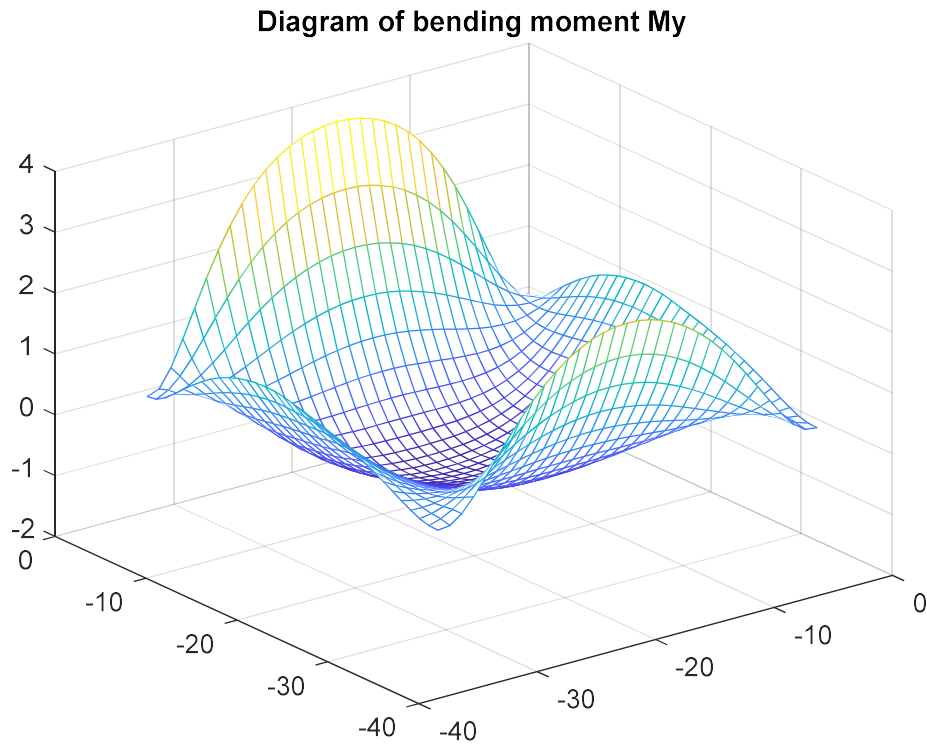
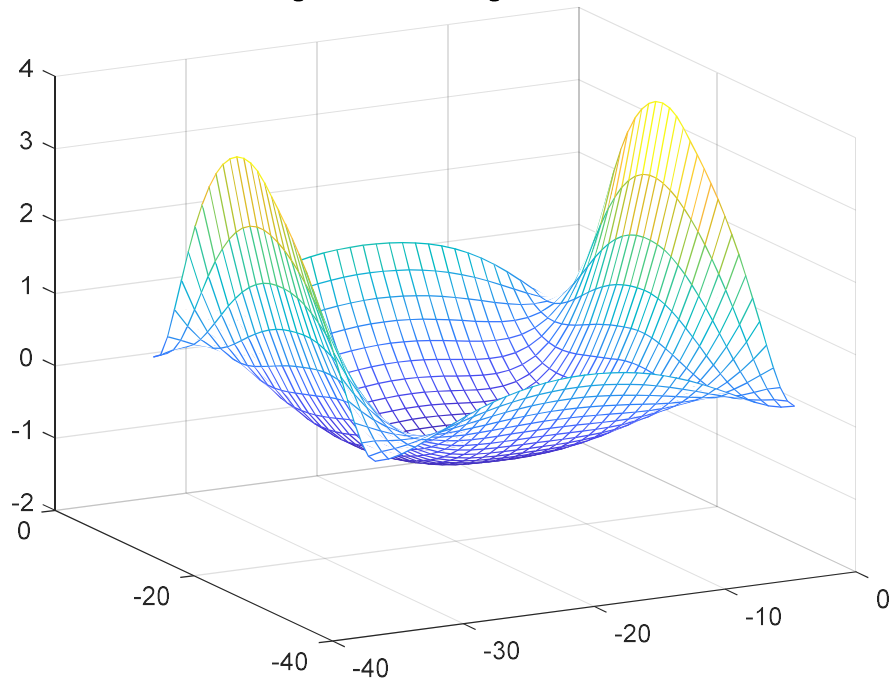
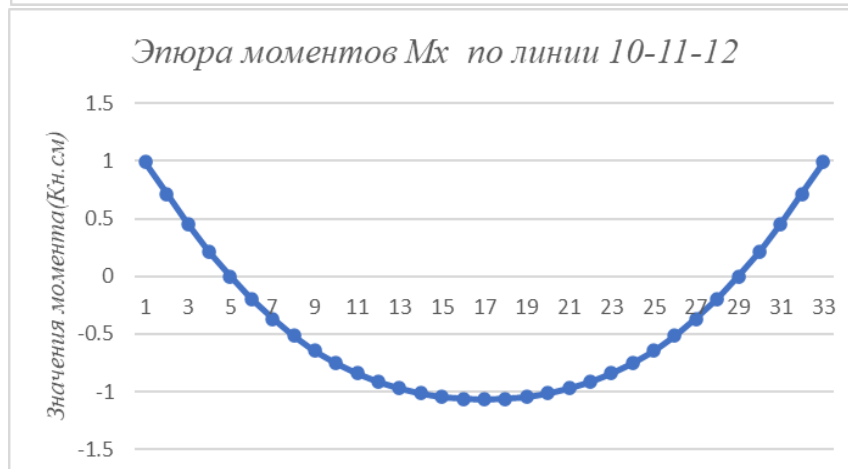
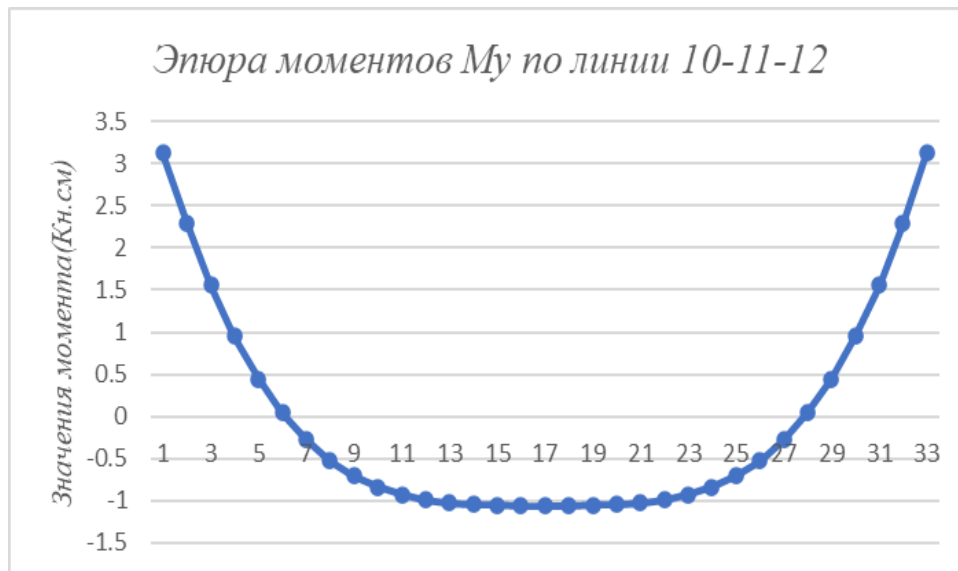


Рисунок 4.29 - Поверхность моментов (кг.см)  $M(y)$  при  $h=1/32$ .



Diagram of bending moment  $M_x$ Рисунок 4.30 - Поверхность моментов (кг.см)  $M(x)$  при  $h=1/32$ .



*Рисунок 4.31 - Эюры изгибающих моментов при  $h=1/32$  по линиям 01-11-21 и 10-11-12.*

Анализируя информацию на рисунках 4.29, 4.30 и 4.31 можно отметить, что качественно характер распределения значений изгибающего момента соответствует характеру нагружения. На той половине пластины, где интенсивность распределенной нагрузки выше, значения опорных и пролетных моментов превосходят аналогичные для менее загруженной половины симметричной пластины.

#### 4.4. Примеры расчета гибких пластинок на упругом основании.

##### 4.4.1. Расчёт шарнирно опёртой гибкой квадратной пластинки со свободно сближающимися краями, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой, с учетом отпора упругого основания.

Характеристики пластинки и характер нагружения заимствуем из параграфа 4.3.2, а именно: толщина пластинки  $H=0,1\text{см}$ , сторона  $a=10\text{см}$ , нагрузка  $q=0,5\text{кг/см}^2$ ,  $E=0,75\cdot 10^6\text{ кг/см}^2$  и  $\mu=0,316$ ; Пластина всей поверхностью контактирует с упругим основанием винклеровского типа, где  $K=2,15\text{кг/см}^3$  – принятое значение коэффициента жесткости основания (коэффициента пропорциональности отпора упругого основания).

Краевые условия [12] (2.4.9) на сторонах  $\xi=0$  и  $\xi=2h$ :

$$\bar{w} = 0, m = 0, w^{\xi} = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

На сторонах  $\eta=0$  и  $\eta=2h$  получим те же граничные условия, поменяв  $\xi$  на  $\eta$ .

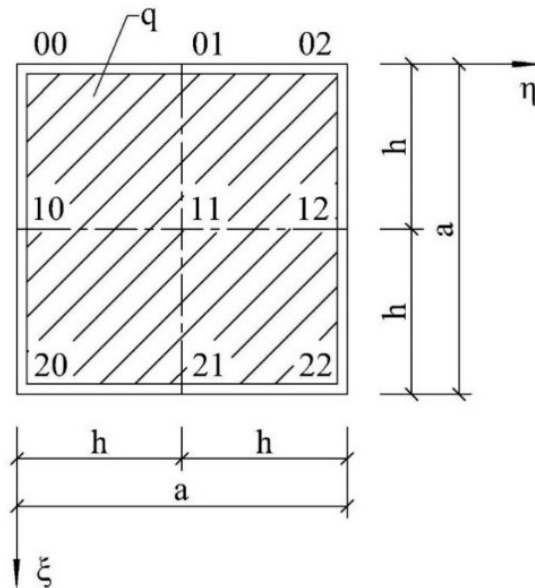


Рисунок 4.32 - Шарнирно опёртая гибкая квадратная пластинка со свободно сближающимися краями.

Перейдем к безразмерным величинам:

$$\bar{q} = \frac{qa^3}{D} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{69,433} = 7,2; \quad \bar{K} = \frac{a^4 K}{D} = 309,651$$

$$k = \frac{EHa^2}{D} = \frac{0,75 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 10^2}{69,433} = 108017,8$$

Возьмём квадратную сетку при минимальном числе разбиений с шагом  $h=1/2$ .

Определив производные по МПА (2.4.17) и учитывая краевые условия, получим:

$$l_{11} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} = \bar{w}_{11}^{\xi\xi} = -\frac{1}{2} m_{11}; n_{11} = \bar{w}_{11}^{\eta\eta} = -m_{11}; t_{11} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{w}_{11}^{\xi\eta} = 0.$$

$$b_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = \psi_{11}^{\xi\xi} = -\frac{1}{2} f_{11}; c_{11} = \psi_{11}^{\eta\eta} = -f_{11}; d_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = \psi_{11}^{\xi\eta} = 0.$$

Тогда:

$$\lambda_{11} = \frac{1}{2} m_{11} f_{11}. \quad (4.4.1)$$

$$\alpha_{11} = k(l_{11}^2 - n_{11} \cdot l_{11}) = -\frac{k}{4} m_{11}^2. \quad (4.4.2)$$

Записав разностную аппроксимацию (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) и (3.2.6) по уравнениям МПА [28] и учитывая краевые условия, получим:

$$-20m_{11} = 6h^2 g_{11} + \frac{13}{3} \bar{K} h^2 \bar{w}_{11} \quad (4.4.3)$$

$$-20\bar{w}_{11} = -\frac{13h^2}{3} m_{11}. \quad (4.4.4)$$

$$-20\psi_{11} = -\frac{13h^2}{3} f_{11}. \quad (4.4.5)$$

$$-20f_{11} = -\frac{13h^2}{3} \alpha_{11}. \quad (4.4.6)$$

Из (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5) и (4.4.6) найдём:

$$\bar{w}_{11} = \frac{234h^4}{(3600 + 169\bar{K}^2h^2)} g_{11}; \quad m_{11} = \frac{1080h^2}{(3600 + 169\bar{K}^2h^2)} g_{11}. \quad (4.4.7)$$

$$f_{11} = \frac{13h^2}{60} \alpha_{11}. \quad (4.4.8)$$

$$\psi_{11} = \frac{13h^2}{60} f_{11}. \quad (4.4.9)$$

С учетом (4.4.7) получим:

$$g_{11} = \frac{712}{17h^4} \bar{w}_{11}. \quad (4.4.10)$$

При учете (4.4.1), (4.4.2), (4.4.4), (4.4.7) и (4.4.8):

$$\lambda_{11} = -\frac{2,6627k^{-3}}{h^4} \bar{w}_{11}. \quad (4.4.11)$$

Подставляя (4.4.10) и (4.4.11) в (2.2.3), получим:

$$\frac{3600 + 169\bar{K}h^4}{234h^4} \bar{w}_{11} = \bar{q}_{11} - \frac{2,6627k^{-3}}{h^4} \bar{w}_{11}. \quad (4.4.12)$$

с учетом:  $\bar{q} = 7,2$ ;  $h = 1/2$ ;  $\bar{K} = 309,651$  и  $k = 108017,8$ .

получим:

$$4601903\bar{w}_{11}^{-3} + 460,791\bar{w}_{11} - 7,2 = 0$$

$$\bar{w}_{11} = 0,00875$$

Тогда  $w_{11} = 0,0875\text{см}$ .

Используя блок-схему (*Рисунок 3.1*), получим  $w_{11} = 0,088\text{см}$  через 15 циклов итераций. Такая сетка выбрана исключительно в методических целях, для иллюстрации алгоритма. Ниже в *таблице 4.9* приведены результаты, полученные на нескольких вложенных одна в другую сетках. Они демонстрируют сходимость численного решения и высокую точность при использовании предлагаемой методики. Вычислительный процесс построен с использованием программы MATLAB.

Таблица 4.9 - Прогиб точки *II* при различных шагах сетки для трех вариантов расчетной схемы пластины.

| $h$   | $h=1/4$ | $h=1/8$ | $h=1/16$ | $h=1/32$ | $h=1/64$ |
|---|---------|---------|----------|----------|----------|
| Максимальные прогибы гибкой пластины на сплошном упругом основании ( <i>см</i> )            | 0,1097  | 0,1168  | 0,1177   | 0,118    | 0,1181   |
| Прогибы точки <i>II</i> гибкой пластины, половина которой на упругом основании( <i>см</i> ) | 0,1212  | 0,1291  | 0,1306   | 0,1308   | 0,1308   |
| Максимальные прогибы гибкой пластины без упругого основания ( <i>см</i> )                   | 0,133   | 0,141   | 0,143    | 0,143    | 0,142    |

Здесь же, для сравнения, представлены результаты расчета этой пластины без учета контакта с упругим основанием и с учетом частичного контакта. Под частичным контактом подразумевается наличие упругого основания только под частью пластины. В этой задаче мы рассматривали вариант, когда под одной половиной пластины основание есть, а под другой его нет. Методика расчета пластин на несплошном упругом основании будет рассмотрена ниже.

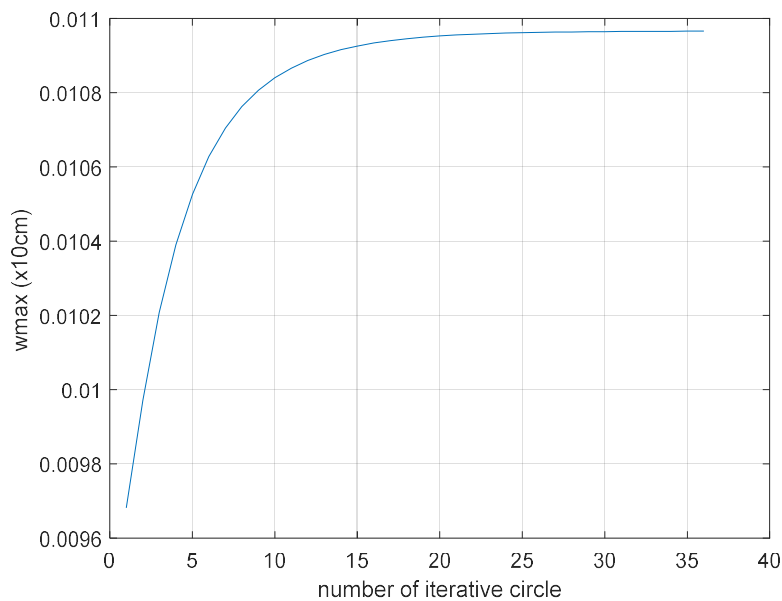
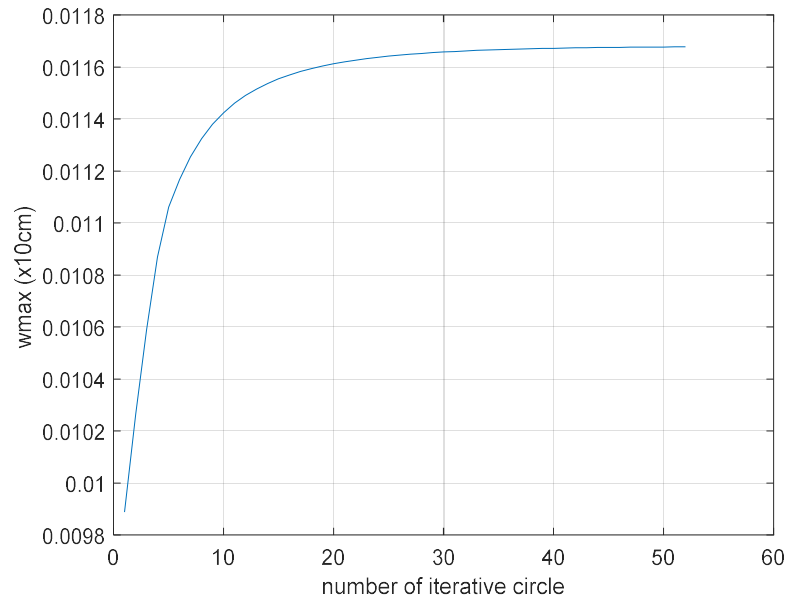
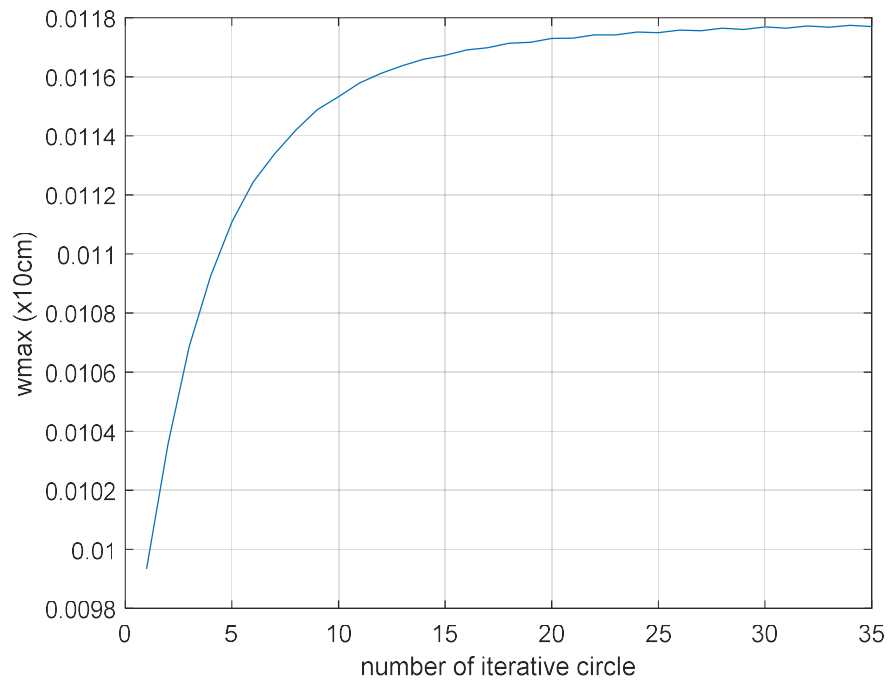


Рисунок 4.33 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерации при шаге  $h=1/4$



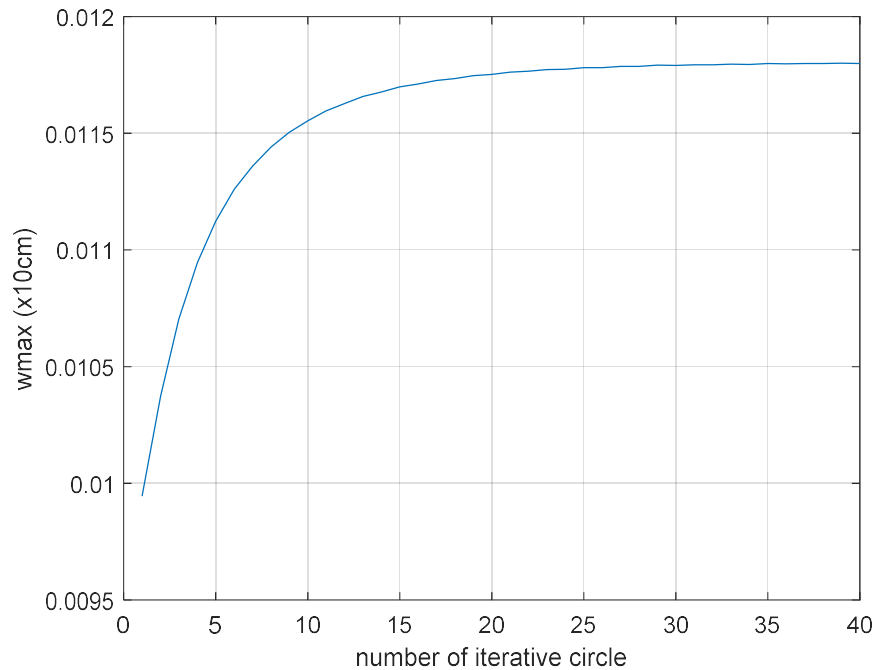
*Рисунок 4.34 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерации при шаге  $h = 1/8$*



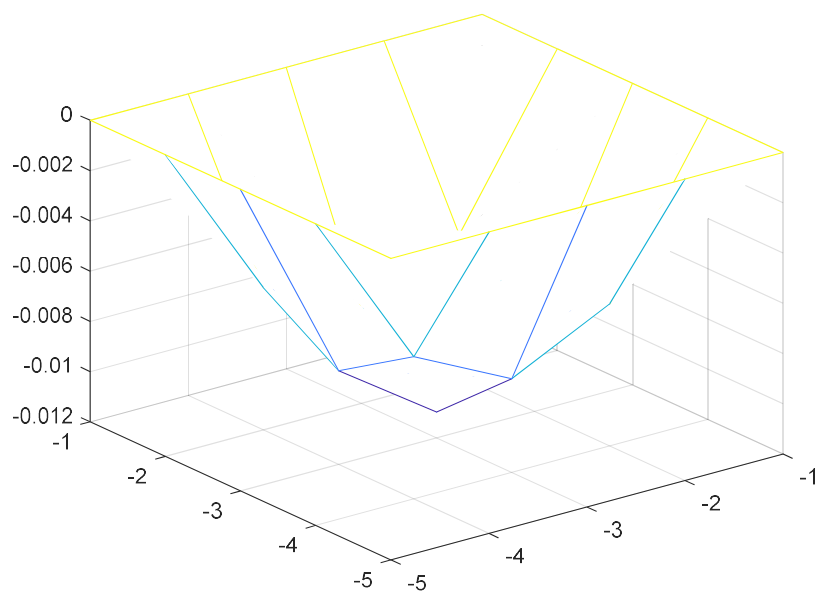
*Рисунок 4.35 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерации при шаге  $h = 1/16$*

Полученные значения максимальных прогибов для пластины, частично опирающейся на упругое основание, меньше чем значения прогибов пластины без основания и больше, чем у пластины полностью лежащей на упругом основании, что качественно подтверждает полученные результаты.

Скорость сходимости итерационного процесса при разных значения шага расчетной сетки можно оценить с помощью графиков на рисунках 4.33 – 4.36. Получаемые поверхности деформированных пластин в условном масштабе (или поля прогибов) для разных случаев сгущения расчетной сетки приведены на рисунках 4.37 - 4.40



*Рисунок 4.36 График изменения максимального прогиба по номеру цикла итерации при шаге  $h = 1/32$*



*Рисунок 4.37 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шагах:  $h = 1/4$*



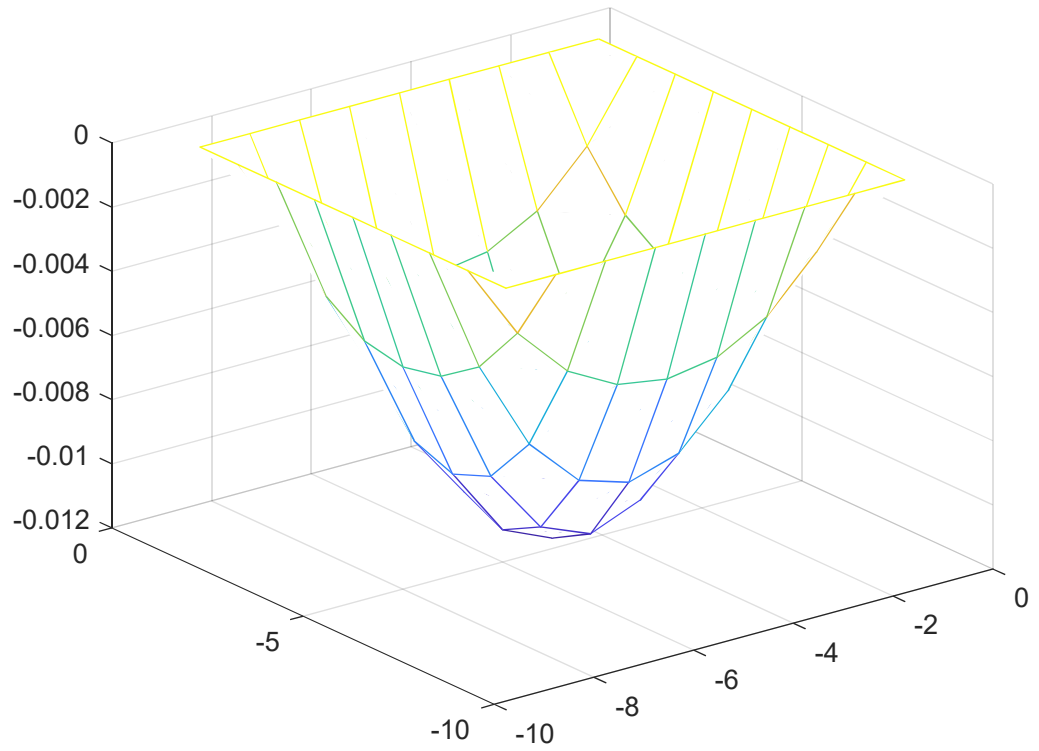


Рисунок 4.38 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шагах:  $h = 1/8$

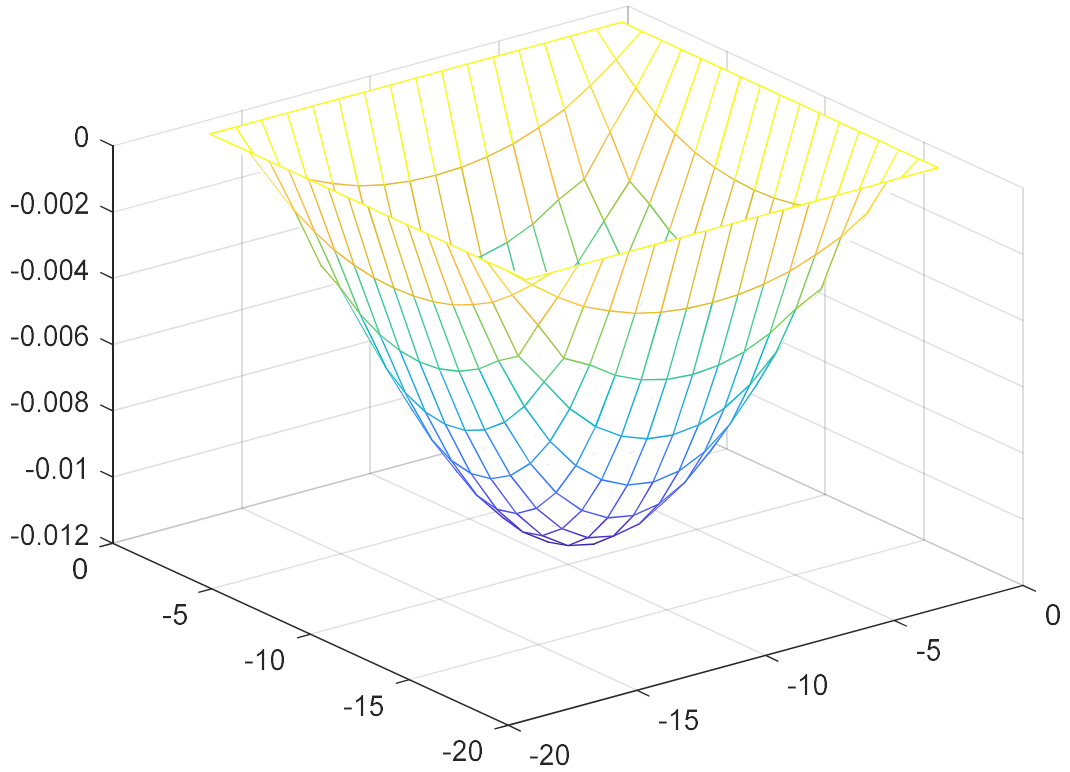


Рисунок 4.39 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шагах:  $h = 1/16$

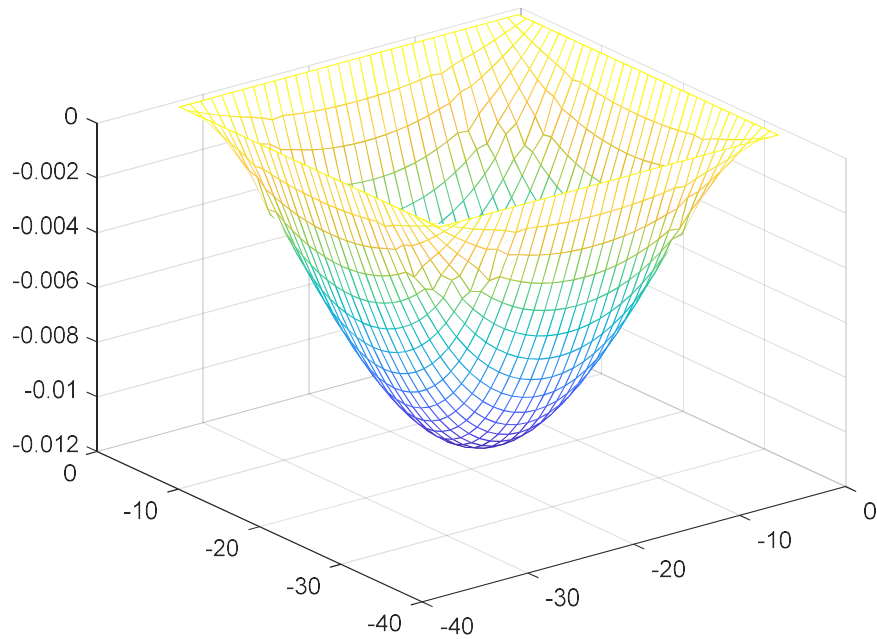


Рисунок 4.40 Поверхность прогибов (см) в пластинке при шагах:  $h = 1 / 32$

#### 4.4.2. Расчёт гибкой квадратной пластинки, со свободно сближающимися закреплёнными краями, с учётом отпора упругого основания.

По прежнему будем считать, что толщина пластинки  $H=0,1$  см, сторона  $a=10$  см, нагрузка  $q=0,5$  кг/см<sup>2</sup>, модуль упругости  $E=0,75 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu=0,316$ . Коэффициент отпора упругого основания по модели Винклера  $K=2,15$  кг/см<sup>3</sup> (Рисунок 4.41).

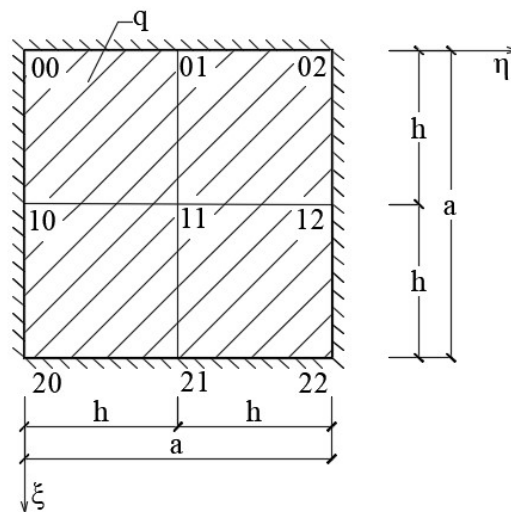


Рисунок 4.41 - Квадратная закреплённая пластинка со свободно сближающимися краями.

В таблице 4.10 приведены значения максимальных прогибов для трех вариантов расчетной схемы пластины: без учета отпора упругого основания, с учетом частичного контакта и для пластины полностью контактирующей с упругим основанием.

Таблица 4.10 - Прогиб точки 11 при различных шагах сетки

| $h$   | $h = 1/4$ | $h = 1/8$ | $h = 1/16$ | $h = 1/32$ | $h = 1/64$ |
|---|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| Максимальные прогибы гибких пластин на сплошном упругом основании (см)      | 0,065     | 0,0654    | 0,0661     | 0,0663     | 0,0664     |
| Прогибы точки 11 гибкой пластины, половина которой на упругом основании(см) | 0.06987   | 0,07079   | 0,07169    | 0,07198    | 0,0721     |
| Максимальные прогибы гибких пластин без упругого основания (см)             | 0,075     | 0.0764    | 0.0778     | 0.0782     | 0,0782     |

#### 4.4.3. Расчёт гибкой прямоугольной пластины на несплошном упругом основании.

Рассмотрим расчет прямоугольной пластины. Края пластины жестко зацементированы. Толщина пластинки  $H=0,1$  см, сторона  $a=10$  см, нагрузка  $q=0,5$  кг/см<sup>2</sup>, модуль упругости  $E=0,75 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu=0,316$  и коэффициент отпора  $K=2,15$  кг/см<sup>3</sup>. Левая половина пластинки опирается на упругое основание, жесткостная характеристика которого определяется коэффициентом отпора  $K=2,15$  кг/см<sup>3</sup>. На правой половине отпор основания отсутствует (Рисунок 4.42).

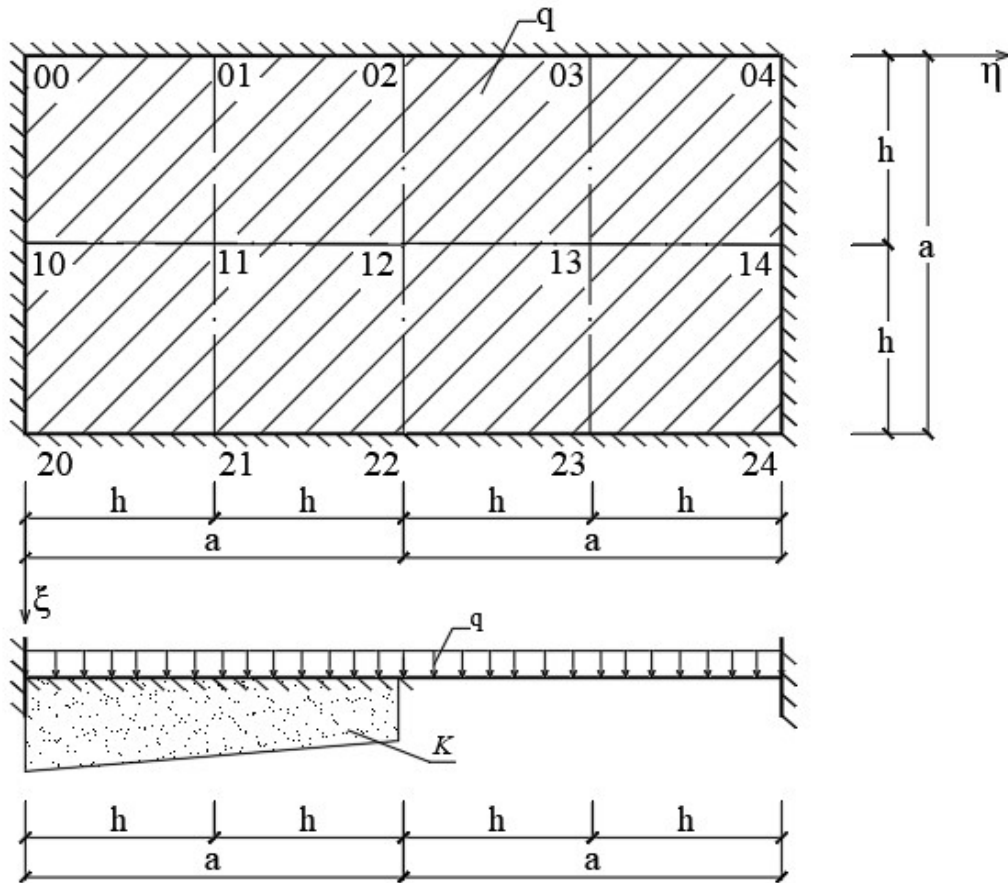


Рисунок 4.42 - Прямоугольная защемлённая пластинка со свободно сближающимися краями

Численная методика позволяет задавать произвольный закон изменения характеристики отпора основания по площади опирания пластины. Уравнение (3.3.2), учитывающее отпор основания, записано для случая  $K=const$ . Запишем его здесь для более общего случая, когда  $K$  может принимать произвольные значения и, кроме того, может терпеть конечный разрыв:

$$\Omega_1 = \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} {}^I\bar{K}_{i-1,j-1} \bar{w}_{i-1,j-1} + 2 \left( {}^I\bar{K}_{i-1,j} + {}^{III}\bar{K}_{i-1,j} \right) \bar{w}_{i-1,j} + {}^{III}\bar{K}_{i-1,j+1} \bar{w}_{i-1,j+1} + \\ + 2 \left( {}^I\bar{K}_{i,j-1} + {}^{II}\bar{K}_{i,j-1} \right) \bar{w}_{i,j-1} + 13 \left( {}^I\bar{K}_{i,j} + {}^{II}\bar{K}_{i,j} + \\ + {}^{III}\bar{K}_{i,j} + {}^{IV}\bar{K}_{i,j} \right) \bar{w}_{ij} + 2 \left( {}^{III}\bar{K}_{i,j+1} + {}^{IV}\bar{K}_{i,j+1} \right) \bar{w}_{i,j+1} + \\ + {}^{II}\bar{K}_{i+1,j-1} \bar{w}_{i+1,j-1} + 2 \left( {}^{II}\bar{K}_{i+1,j} + {}^{IV}\bar{K}_{i+1,j} \right) \bar{w}_{i+1,j} + {}^{IV}\bar{K}_{i+1,j+1} \bar{w}_{i+1,j+1} \end{pmatrix}. \quad (4.4.13)$$

Граница основания проходит по линии 02-12-22 (рис.4.42). Рассмотрим окрестности точки 12. Нумерация зон, примыкающих к точке  $i,j$  приведена на рисунке 2.2. Запишем значения параметра  $K$  в точках 02, 12, 22:  $^I K_{12} = ^{II} K_{12} = K$ ,  $^{III} K_{12} = ^{IV} K_{12} = 0$ ,  $^I K_{02} = ^I K_{22} = K$ ,  $^{III} K_{02} = ^{IV} K_{22} = 0$ . Запишем уравнение (3.3.1) для точки 12 с учетом (4.4.1) и указанных выше значений  $K_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
 & m_{01} + 4m_{02} + m_{03} + \\
 & + 4m_{11} - 20m_{12} + 4m_{13} + \\
 & + m_{21} + 4m_{22} + m_{23} - \\
 & - \frac{h^2}{12} \left( \begin{array}{l} \overline{K w_{01}} + 2\overline{K w_{02}} + 0\overline{w_{03}} + \\ + 4\overline{K w_{11}} + 26\overline{K w_{12}} + 0\overline{w_{13}} + \\ + \overline{K w_{21}} + 2\overline{K w_{22}} + 0\overline{w_{23}} \end{array} \right) = -\frac{3}{2} h^2 \left( ^I g_{12} + ^{II} g_{12} + ^{III} g_{12} + ^{IV} g_{12} \right). \quad (4.4.14)
 \end{aligned}$$

Сравнение прогибов в точке 12 прямоугольной пластины на упругом основании, при неполном контакте и без учета отпора приведено в таблице 4.11.

Таблица 4.11 - Прогиб точки 12 при различных шагах сетки

| $h$   | $h = 1/4$ | $h = 1/8$ | $h = 1/16$ | $h = 1/32$ |
|---|-----------|-----------|------------|------------|
| Максимальные прогибы гибкой пластины на сплошном упругом основании (см)                     | 0,10296   | 0,1075    | 0,10887    | 0,10923    |
| Прогибы точки 12 гибкой пластины (Рисунок 4.42), половина которой на упругом основании (см) | 0.1241    | 0,1274    | 0,1287     | 0,12905    |
| Максимальные прогибы гибкой пластины без упругого основания (см)                            | 0,15102   | 0,15119   | 0,15193    | 0,15215    |

**Пример 2.** Рассмотрим ту же пластину, но при иных условиях опирания на упругое основание. Предположим, что основание отсутствует под центральной частью пластины, между линиями 01-11-21 и 03-13-23 (Рисунок 4.43).

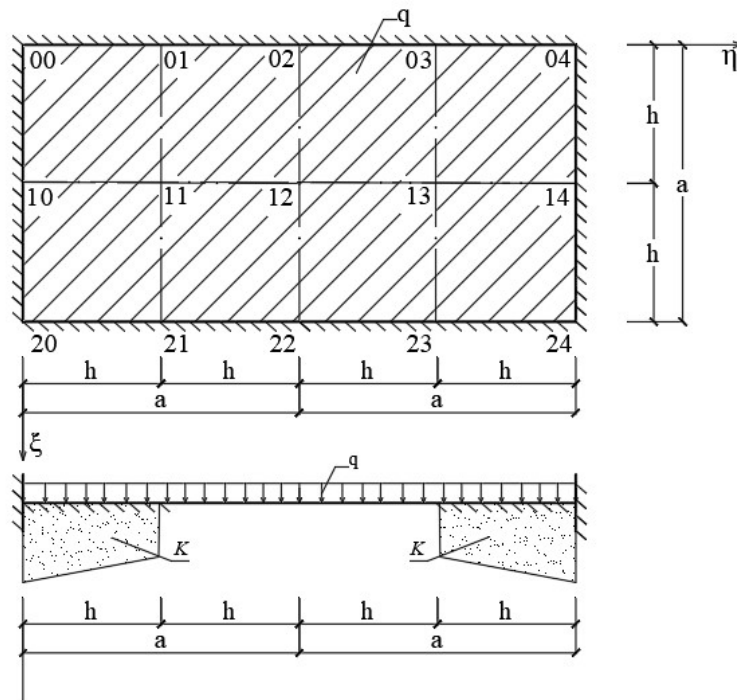


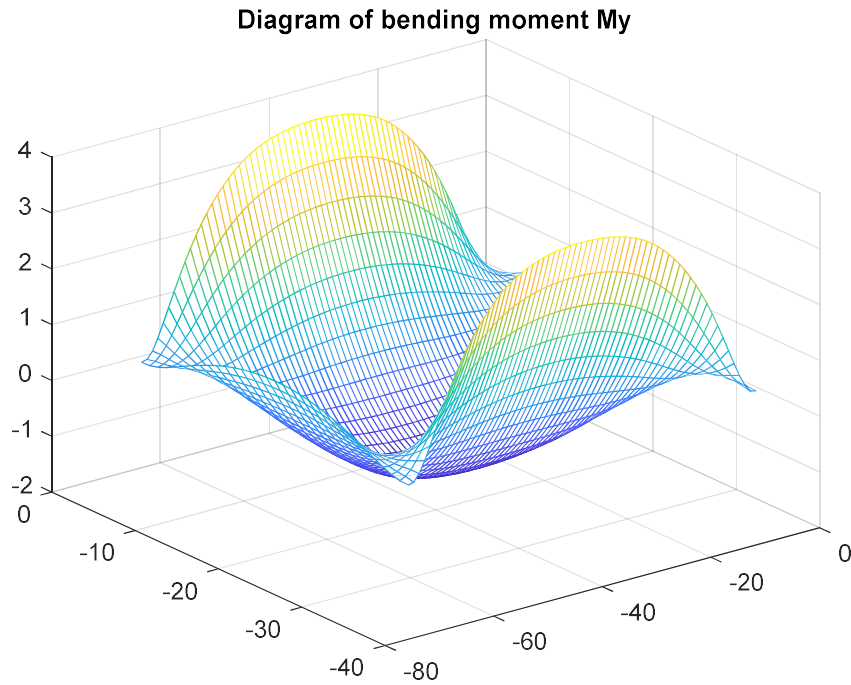
Рисунок 4.43 - Прямоугольная защемлённая пластинка со свободно сближающимися краями

Таблица 4.12 - Прогиб точки 12 при различных шагах сетки

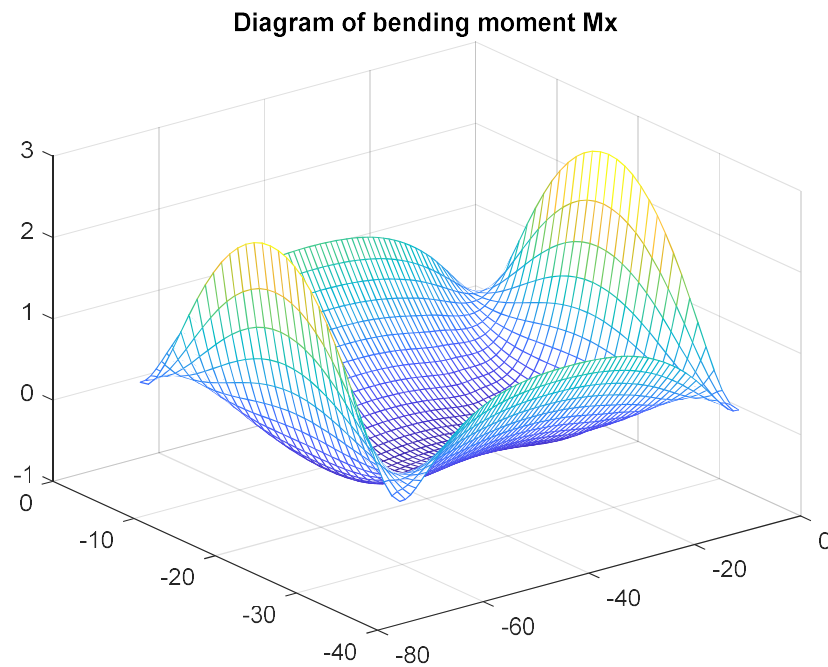
| $h$   | $h = 1/4$ | $h = 1/8$ | $h = 1/16$ | $h = 1/32$ |
|---|-----------|-----------|------------|------------|
| Максимальные прогибы гибкой пластины на сплошном упругом основании (см)                         | 0,103     | 0,1075    | 0,1089     | 0,1092     |
| Прогибы точки 12 гибкой пластины (рисунок 4.21) на неполном упругого основания на половине (см) | 0,14394   | 0,14538   | 0,14635    | 0,14662    |
| Максимальные прогибы гибкой пластины без упругого основания (см)                                | 0,15102   | 0,15119   | 0,15193    | 0,15215    |

Вполне ожидаемо, что вертикальное перемещение точки 12 пластины во втором варианте задачи (табл. 4.12), когда зона отсутствия контакта с основанием расположена в центральной части, по значению превосходит перемещение той же точки из первого варианта (табл. 4.11), когда точка принадлежит границе зон наличия и отсутствия отпора упругого основания. И вместе с тем, оба эти значения не выходят за пределы решения для пластины на упругом основании и без него.

Поверхности распределения значений изгибающих моментов (по направлениям  $x$  и  $y$ ) представлены на рисунках 4.44 и 4.45. Изометрическое изображение деформированной поверхности пластины приведено на рисунке 4.46.



*Рисунок 4.44 - Поверхность моментов  $M(y)$  (кг.см) при  $h=1/32$ .*



*Рисунок 4.45 - Поверхность моментов  $M(x)$  (кг.см) при  $h=1/32$ .*

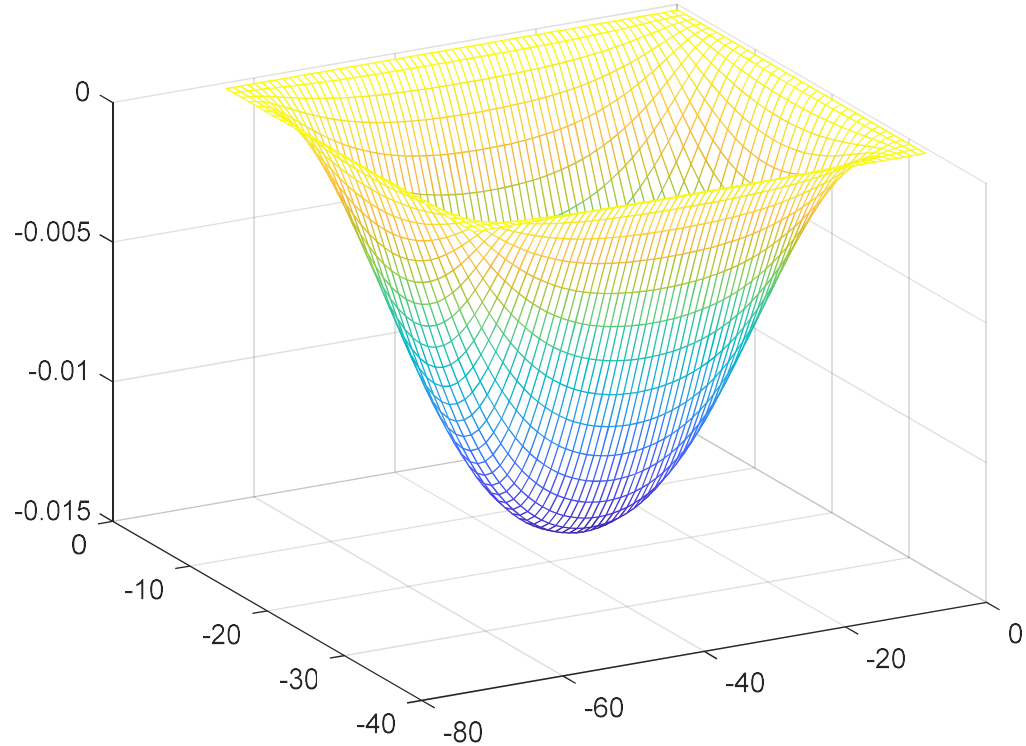
Diagram of deflection  $w$ 

Рисунок 4.46 - Схема деформирования пластины в условном масштабе при  $h=1/32$ .



Рисунок 4.47 – График прогибов по линии 10-12-14 в пластинке при шаге  $h=1/32$ .



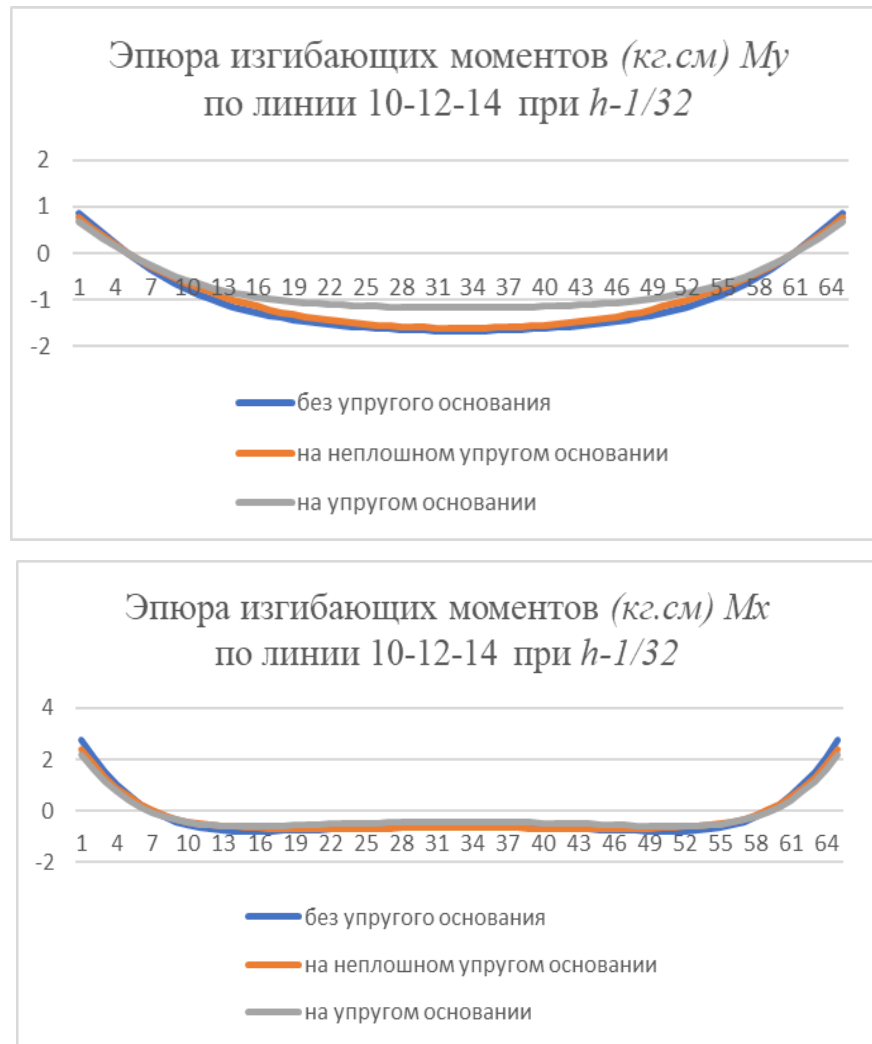


Рисунок 4.48 - Эпюры изгибающих моментов при  $h=1/32$  по линиям 10-12-14 при  $h=1/32$ .

На рисунках 4.47 и 4.48 приведены график прогибов и эпюры изгибающих моментов вдоль продольной оси симметрии.

#### 4.4.4. Расчёт гибкой квадратной пластинки, на упругом основании с переменным коэффициентом постели.

По прежнему, будем работать с пластинкой, толщина которой  $H=0,1$  см, сторона  $a=10$  см, нагрузка  $q=0,5$  кг/см<sup>2</sup>, модуль упругости  $E=0,75 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu=0,316$ . Примем, что значения коэффициента отпора основания изменяются вдоль одной из осей и на разных сторонах пластины составляют:  $K_1=2,0$  кг/см<sup>3</sup>,  $K_2=10,0$  кг/см<sup>3</sup>. При этом укажем, что значения могут

изменяться по произвольному закону вдоль двух сторон, а также могут быть заданы индивидуальные значения для каждой расчетной точки.

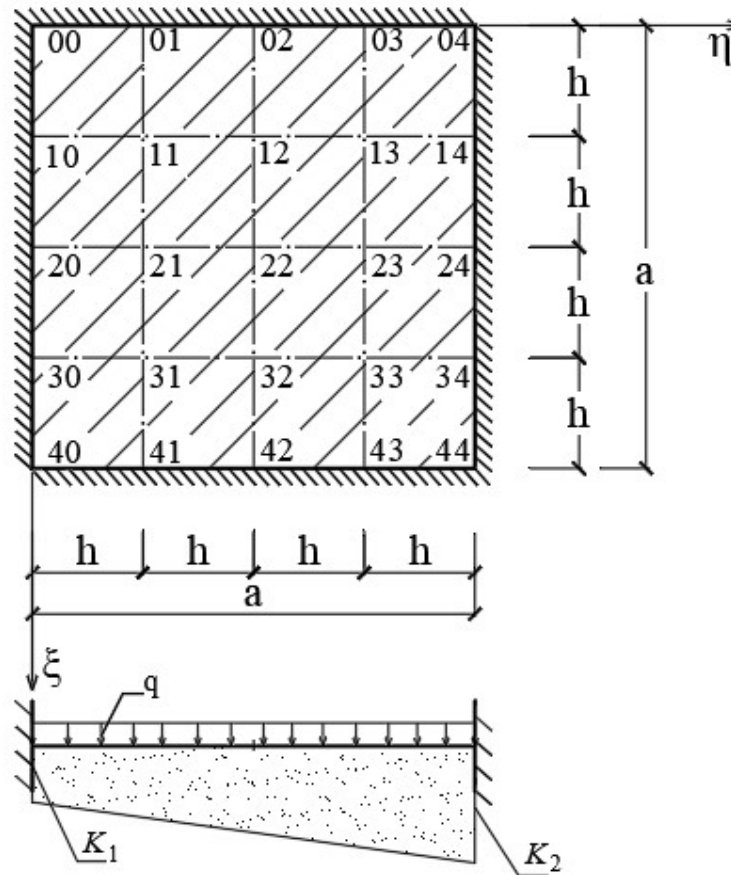


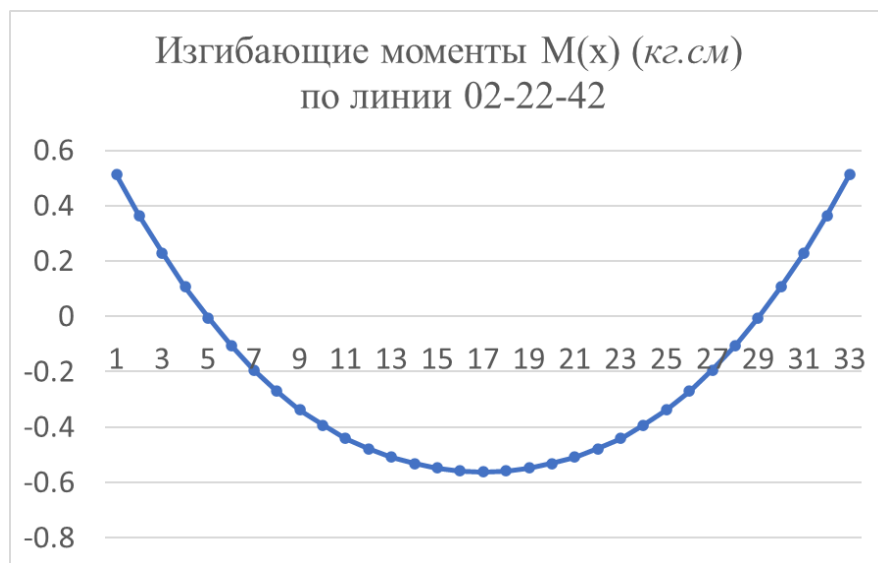
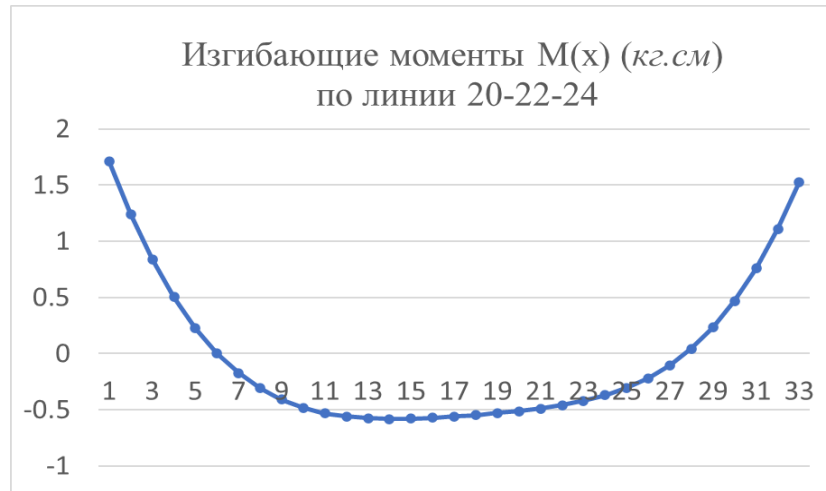
Рисунок 4.49 - Прямоугольная защемлённая пластинка со свободно сближающимися краями.

Таблица 4.13 - Прогиб точек при различных шагах сетки

| $h$                                   | $h = 1/4$ | $h = 1/8$ | $h = 1/16$ | $h = 1/32$ | $h = 1/64$ |
|---------------------------------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| Прогибы точки 21 гибкой пластины (см) | 0,0310    | 0,0314    | 0,0324     | 0,0329     | 0,0332     |
| Прогибы точки 22 гибкой пластины(см)  | 0,0455    | 0,0477    | 0,0493     | 0,0502     | 0,0506     |
| Прогибы точки 23 гибкой пластины(см)  | 0,0283    | 0,0288    | 0,0297     | 0,0301     | 0,0304     |

В таблице 4.13 приведены значения прогибов для трех точек, лежащих на оси, вдоль которой меняется характеристика жесткости основания. Результаты

соответствуют постановке задачи. Там где жесткость основания выше – прогибы меньше, и наоборот.



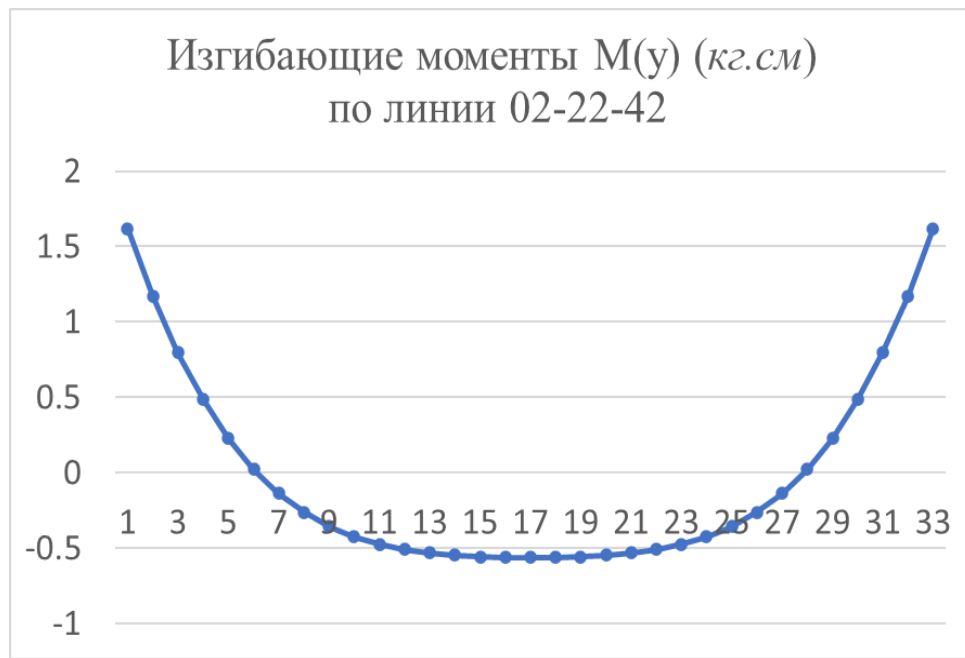


Рисунок 4.50 - Эпюры изгибающих моментов при  $h=1/32$  по линиям 20-22-24 и 02-22-42.

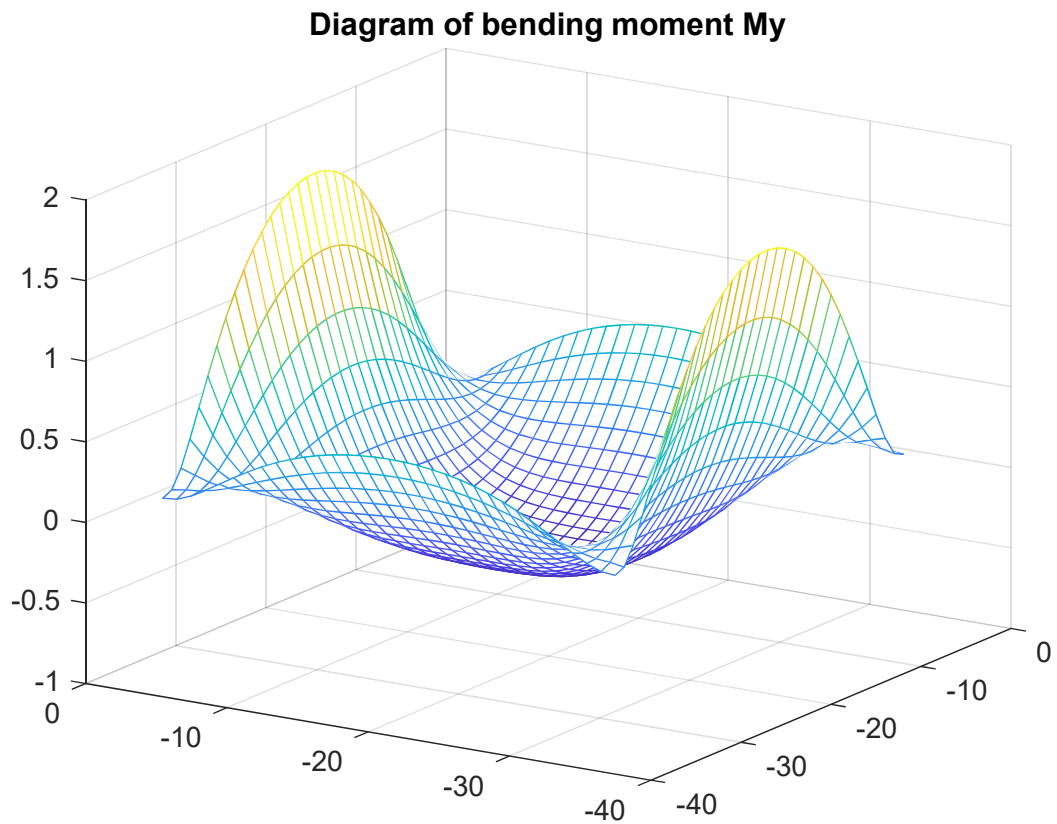
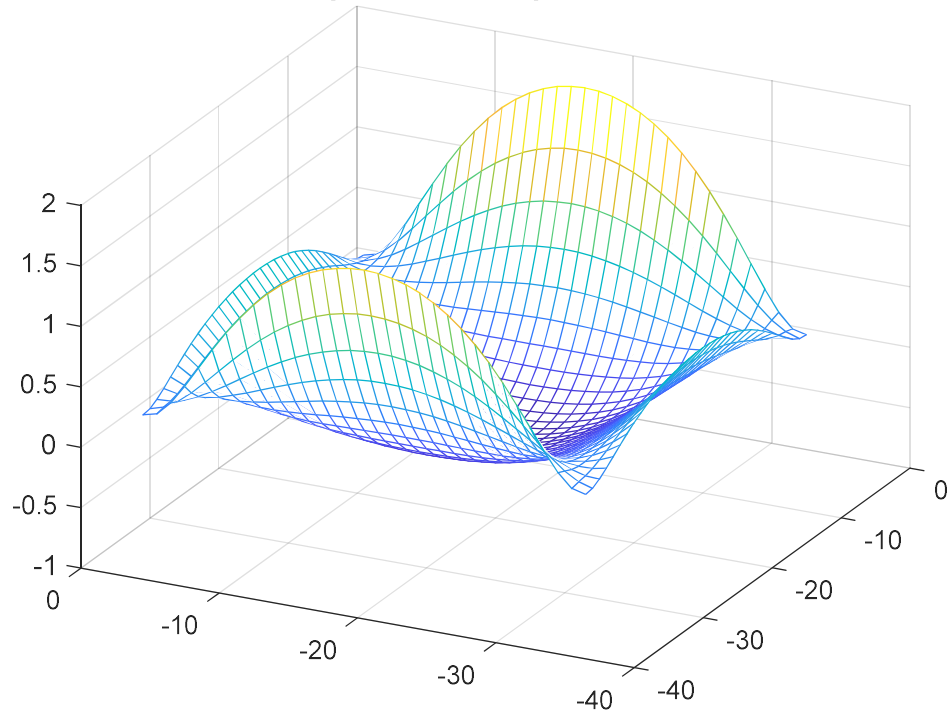
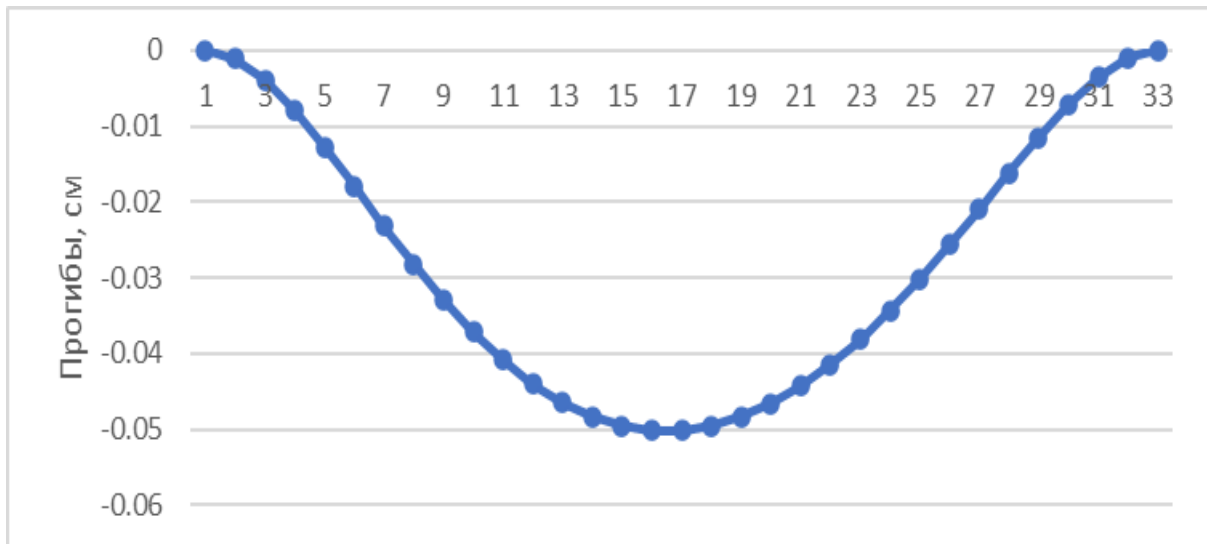


Рисунок 4.51 - Поверхность моментов  $M(y)$  (кг.см) при  $h=1/32$ .

Diagram of bending moment  $M_x$ Рисунок 4.52 - Поверхность моментов  $M(x)$  (кг.см) при  $h=1/32$ .Рисунок 4.53 –Этюра прогибов (см) по линии 20-22-24 при  $h=1/32$ .

На рисунках 4.51 и 4.52 приведены поверхности значений изгибающих моментов по направлениям  $y$  и  $x$  соответственно.

На рисунке 4.50 приведены эпюры моментов по линии, проходящей через точки 20-22-24 (см. рис 4.14), и по линии проходящей через точки 02-22-42. Видно что изгибающие моменты выше где жесткости основания выше и наоборот.

#### 4.5. Выводы по главе 4

На базе разностных уравнений МПА и обобщенных разностных уравнений МКР составлены программы расчета прямоугольных гибких пластин с использованием пакета прикладных программ MATLAB. Указанные программы позволяют вести расчет с учетом различных краевых условий, кусочно-распределенных нагрузок, наличия основания под всей пластиной, под частью пластины и без учета отпора упругого основания.

Сопоставление полученных результатов с известными ранее опубликованными подтвердило более высокую точность при использовании разностных уравнений МПА в сравнении с обобщенными разностными уравнениями МКР. Кроме того, преимущество уравнений МПА заключается в возможности учета полосовых силовых и моментных нагрузок, возможности более корректного учета скачков жесткостных характеристик пластины и упругого основания. Отметим также, что при решении задач на действие кусочно-распределенных нагрузок без учета работы основания, результаты этих двух методов близки между собой.

Выполненные численные исследования показали достаточно быстрое устойчивое приближение итерационного процесса к окончательному искомому результату при различных шагах расчетной сетки. Количество итераций на различных сетках при достижении удовлетворительного результата не превышало 20 - 25 итераций.

Контроль качества получаемых результатов, как для тестовых задач, так и для вновь решаемых, осуществлялся посредством проверки сходимости решения на нескольких вложенных одна в другую расчетных сетках. Предложенная методика продемонстрировала быструю сходимость решения и высокую точность для тестовых задач. Так, отличие полученных результатов от известных данных Вольмира А.С составило порядка 3 процентов.

С помощью составленных программ были получены решения для гибких квадратных и прямоугольных пластин: загруженных кусочно распределенной нагрузкой; частично или полностью опирающихся на упругое основание; с учетом

изменения жесткости основания по длине конструкции по наперед заданному закону.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование выполнено в соответствии с поставленными целями. Таким образом, в диссертации выполнены следующие задачи:

Разработаны методика, алгоритм и программа расчета прямоугольных пластинок с учетом геометрической нелинейности на действие различных видов статических нагрузок с различными краевыми условиями на упругом основании и без упругого основания. В основу выполненной работы легли предложенные Габбасовым Радеком Фатыховичем разностные уравнения метода последовательных аппроксимаций (МПА).

На основании изложенного метода автором составлена программа для ЭВМ с использованием программы MATLAB. Программа позволяет решать задачи по расчету гибких пластинок на статические нагрузки без упругого основания и на упругом основании с постоянным и переменным коэффициентом постели при различных краевых условиях.

Оценка точности и надёжности численной методики выполнена при решении известных тестовых задач. Для вновь решаемых задач выполнялась проверка сходимости решения на вложенных одна в другую сетках.

С использованием составленной программы для ЭВМ получены решения новых задач по расчету пластины в геометрически нелинейной постановке на статические нагрузки без упругого основания и на упругом основании с постоянным и переменным коэффициентом постели при различных краевых условиях.

В качестве **рекомендации** можно указать следующее. При расчете прямоугольных пластин на действие кусочно-распределенных поперечных нагрузок без учета взаимодействия с упругим основанием рекомендуется использовать обобщенные разностные уравнения МКР. При более компактной форме записи, решение, полученное с их использованием, обладает сравнимой точностью с вариантом использования разностных уравнений МПА.

В качестве **перспективы** разработки рассматриваемой темы предполагается расчет гибких пластин на динамические нагрузки, расчет гибких пластин с учетом



других моделей упругого основания, расчет пластин с учётом двух видов нелинейности (геометрическая и физическая) с использованием разностных уравнений МПА.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов П.А. О развитии численных методов определения напряженно-деформированного состояния пространственных плитно-оболочечных железобетонных конструкций с учетом нелинейных факторов (научная статья; опубликована на английском языке) / П.А. Акимов, А.М. Белостоцкий, Н.И. Карпенко, В.Н. Сидоров, С.Н. Карпенко, Т.Б. Кайтуков и другие // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering – 2018. – Vol. 456, №1.
2. Акимов П.А. О разработке, исследовании и верификации корректных численных методов решения нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций / П.А. Акимов, А.М. Белостоцкий, А.С. Павлов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – №5.
3. Акимов П.А. Универсальный программный комплекс «СТАДИО» для численного решения линейных и нелинейных задач теории поля, статики, устойчивости и динамики пространственных комбинированных систем: общие характеристики и суперэлементные возможности (научная статья; опубликована на английском языке) / П.А. Акимов, А.М. Белостоцкий, А.Л. Потапенко // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol. 14, Issue 3.
4. Александров А.В. Численное решение линейных дифференциальных уравнений при помощи матрицы дифференцирования / А.В. Александров // Тр. МИИТ. – М., 1961. – В. 131. – С. 253-266.
5. Артюхин Ю.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов / Ю.П. Артюхин, А.П. Грибов // Казань: Фэн. – 2002. – 199 с.
6. Белостоцкий А.М. Нелинейное конечноэлементное моделирование устойчивости берегозащитных сооружений имеретинской низменности с

- учетом фактических и прогнозируемых деформаций берегового откоса / А.М. Белостоцкий, С.И. Дубинский // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2011. – Т. 7(2). – С.19-26.
7. Белостоцкий А.М. О геометрически нелинейных расчетах плавающих крыш резервуаров при сейсмических воздействиях / А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, И.Н. Афанасьева, В.В. Вершинин, Т.Б. Кайтуков, С.В. Щербина // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сборник трудов №18. – М. 2015. – №18. – С. 73-94.
  8. Белостоцкий А.М. Расчет конструкций большепролетных зданий с учетом физической геометрической и конструктивной нелинейностей / А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2010. – Т. 6(1-2). – С. 80-86.
  9. Боброва В.И. Численный метод расчета пологих оболочек на динамические воздействия / В.И. Боброва // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2018. – 111 с.
  10. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В. З. Власов // Гостехиздат. – 1949. – 784 с.
  11. Власов В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев // М.: Физматлит. – 1960. – 497 с.
  12. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир // М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1956. – 420 с.
  13. Габбасов А.Р. Определение оптимальных форм стержневых конструкций, лежащих на упругом основании / А.Р. Габбасов // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1989. – 187 с.
  14. Габбасов Р.Ф. Большие прогибы удлиненной пластинки, изгибаемой по цилиндрической поверхности / Р.Ф. Габбасов, Н.Т. Фам // Дни студенческой науки: сборник докладов научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ студентов института строительства и архитектуры. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ – 2018. – С. 1030-1032.
  15. Габбасов Р.Ф. К расчету стержней и стержневых систем методом последовательных аппроксимаций / Р.Ф. Габбасов // Известия ВУЗов.

- Строительство и архитектура. – 1980. – №4. – С. 30-35.
16. Габбасов Р.Ф. О разностных уравнениях в задачах прочности и устойчивости плит / Р.Ф. Габбасов // Прикладная механика. – 1982. – Т. 8(9). – С. 63-67.
  17. Габбасов Р.Ф. Применение теории сплайнов к задачам строительной механики / Р.Ф. Габбасов // Сборник трудов МИСИ, Некоторые вопросы прочности строительных конструкций. – 1978. – №156. – С. 65-76.
  18. Габбасов Р.Ф. Разностные уравнения МПА в задачах изгиба балок и плит / Р.Ф. Габбасов // Сборник трудов МИСИ, Инженерные проблемы прикладной механики. – 1987. – С. 31-39.
  19. Габбасов Р.Ф. Расчет балок на упругом основании с двумя коэффициентами постели / Р.Ф. Габбасов, Н.Б. Уварова, В.В. Филатов // Вестник МГСУ. – 2012. – №2. – С. 25-29.
  20. Габбасов Р.Ф. Расчет изгибаемых плит с использованием обобщенных уравнений МКР и разностных уравнений МПА с применением ЭВМ / Р.Ф. Габбасов, Л.В. Захарова, Н.Б. Уварова // М.: Методические указания. МИСИ. – 1988. – 42 с.
  21. Габбасов Р.Ф. Расчет плит и балок на упругом основании с использованием разностных уравнений МПА (с применением персональных компьютеров) / Р.Ф. Габбасов, Н.Б. Уварова // М.: Методические указания. МГСУ. – 2003. – 41 с.
  22. Габбасов Р.Ф. Расчет плит с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций / Р.Ф. Габбасов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1980. – №3. – С. 27-30.
  23. Габбасов Р.Ф. Расчет плит ступенчато-переменной толщины на упругом основании / Р.Ф. Габбасов, М.Х. Исмаев // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1988. – №3. – С. 29-33.
  24. Габбасов Р.Ф. Расчет сжато-изогнутых пластин при неполном контакте с упругим основанием / Р.Ф. Габбасов, В.В. Филатов // Сборник трудов МГСУ, Теоретические и экспериментальные исследования прочности и жёсткости элементов строительных конструкций. – М., 1997. – С. 50-53.

25. Габбасов Р.Ф. Расчет стержней и пластин на устойчивость с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций / Р.Ф. Габбасов, Н.Б. Уварова, В.В. Филатов // М.: Методические указания. МГСУ. – 2009. – 57 с.
26. Габбасов Р.Ф. Сравнение методов конечных элементов и последовательных аппроксимаций / Р.Ф. Габбасов // Труды девятого международного конгресса по применению математики в технических науках. – Веймар, 1981. – С. 13-15.
27. Габбасов Р.Ф. Численное построение разрывных решений для балок переменного сечения на упругом основании (с реализацией на ЭВМ) / Р.Ф. Габбасов // М.: Методические указания. МИСИ. – 1992. – 16 с.
28. Габбасов Р.Ф. Численное построение разрывных решений задач строительной механики / Р.Ф. Габбасов, А.Р. Габбасов, В.В. Филатов // Москва: Изд-во АСВ. – 2008. – 280 с.
29. Габбасов Р.Ф. Численное решение задач строительной механики с разрывными параметрами / Р.Ф. Габбасов // Дисс. на соискание уч. степени докт. техн. наук. МИСИ. – М., 1989. – 343 с.
30. Габбасов Р.Ф. Численный метод расчета круглых плит в геометрически нелинейной постановке / Р.Ф. Габбасов, Н.Б. Уварова // Вестник МГСУ. – 2017. – Том 12. – Выпуск 6(105). – С. 631-635.
31. Габбасов Р.Ф. Эффективные численные методы построения разрывных решений задач строительной механики / Р.Ф. Габбасов // Известия ВУЗов. Строительство. – 1992. – №2. – С. 104-107.
32. Грибов А.П. Большие прогибы пластин и пологих оболочек со сложным контуром / А.П. Грибов // Автореферат дисс. на соиск. уч. степ, д.ф-м.н. Казань. – 1998. – 43 с.
33. Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек на упругом основании методом граничных элементов / А.П. Грибов // Вестник УлГТУ. – 2000. – №2. – С. 40-46.
34. Дао Нгок Кхоа. Численное исследование изгиба гибких пластин на упругом основании / Дао Нгок Кхоа, В.В. Филатов, Т.Л.К. Хоанг // Инновации и

- инвестиции. – 2022. – №1. – С. 152-156.
35. Дедов Н.И. Переменное нагружение нелинейных пластин и пологих оболочек / Н.И. Дедов, В.Н. Исуткина // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2020. – Т. 22(3). – С. 152-156.
36. Ельмуратов С.К. Применение матричной формы метода конечных разностей к расчету гибких пологих ортотропных оболочек на прочность, устойчивость и динамику / С.К. Ельмуратов // Наука и техника Казахстана. – 2001. – №2. – С. 192-195.
37. Иванов С.П. Приложение вариационного метода В. З.Власова к решению нелинейных задач пластинчатых систем: монография / С.П. Иванов, А.С. Иванова. // Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. – 2015. – 248 с.
38. Иванов С.П. Развитие теории расчета нелинейных пластинчатых систем / С.П. Иванов // Дисс. докт. техн. наук. – М., 2002. – 231 с.
39. Иванов С.П. Устойчивость геометрически нелинейных пластинчатых систем под действием динамических нагрузок / С.П. Иванов, А.С. Иванова, О.Г. Иванов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений – 2020. – Т. 16(3). – С. 219-225.
40. Игнатъев, А. В. Сравнительный анализ эффективности некоторых алгоритмов расчета систем с односторонними связями / А.В. Игнатъев, М.И. Бочков, И.В. Курочкина // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2019. – № 11(731). – С. 87–98. - DOI 10.32683/0536-1052-2019-731-11-87-98.
41. Игнатъев, В. А. Алгоритм расчета изгибаемой пластинки на основе МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием прямоугольного КЭ с четырьмя основными неизвестными в углах / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев, И. С. Завьялов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2021. – № 4 (297). – С. 12–16.
42. Игнатъев А.В. Анализ изгибаемых пластинок с односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода /

- А.В. Игнатъев, В.А. Игнатъев, Е.А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2018. – № 8 (716). – С. 5–4.
43. Исанбаева Ф.С. Большие прогибы пластин со свободно смещающимися краями / Ф.С. Исанбаева, М.С. Корнишин // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1965. – Выпуск 3. – С. 3-17.
44. Исматов М.Х. Расчет плит на упругом основании методом последовательных аппроксимаций / М.Х. Исматов // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1983. – 202 с.
45. Као Зуй Бакч. Расчет сжато-изогнутых ортотропных пластин на несплошном упругом основании / Као Зуй Бакч // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2011. – 129 с.
46. Катерина С.Ю. Исследование напряжено-деформированного состояния конструкций с разрывными параметрами с использованием различных методов строительной механики / С.Ю. Катерина, М.А. Катерина // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Строительная информатика. – 2014. Вып. 11(32). – С. 8.
47. Корнишин М.С. Большие прогибы прямоугольных в плане пластин и пологих оболочек из нелинейно упругого материала / М.С. Корнишин, Н.Н. Столяров, Н.И. Дедов // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1972. Выпуск 9. – С. 157-168.
48. Корнишин М.С. Гибкие пластины и панели / М.С. Корнишин, Ф.С. Исанбаева // М.: Наука. – 1968. – 260 с.
49. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения / М.С. Корнишин // М.: Наука. – 1964. – 192 с.
50. Лащеников Б.Я. Применение тригонометрического интерполирования в задачах строительной механики / Б.Я. Лащеников // Тр. МИИТ. – В.131. – С. 267-295.
51. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики / П.А. Лукаш // М.: Стройиздат. – 1978. – 204 с.
52. Лукманова И.Г. Анализ состояния и основные направления развития производственного потенциала строительной отрасли Вьетнама / И.Г. Лукманова, Нгуен Ван Хиеп. // Экономика строительства. – 2020. – №4(64).

- С. 12-20.
53. Мазурова С.В. Метод последовательных аппроксимаций в задачах расчета изгибаемых плит средней толщины / С.В. Мазурова // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1990. – 187 с.
  54. Малыха Г.Г. Численный метод расчета ребристых плит / Г.Г. Малыха // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1988. – 185 с.
  55. Мансур Алаа Эльдин Мохамед Абдельгафар Ибрагим. Численный метод расчета изгибаемых круглых пластин на статические и динамические нагрузки / Мансур Алаа Эльдин Мохамед Абдельгафар Ибрагим // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2020. – 324 с.
  56. Мелехин Н.М. Численное решение задачи устойчивости пластин при действии неравномерной сжимающей нагрузки / Н.М. Мелехин // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2009. – 189 с.
  57. Мкртычев О.В. Расчет уникального высотного здания на землетрясения в нелинейной динамической постановке / О.В. Мкртычев, М.И. Андреев // Вестник МГСУ. – 2016. – №6 – С. 25-33.
  58. Муниев Д.Д. Расчет пластин и пластинчатых систем методом последовательных аппроксимаций / Д.Д. Муниев // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1989. – 182 с.
  59. Муса Сали. Расчет балок и плит переменной жесткости на динамические воздействия / Муса Сали // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2002. – 147 с.
  60. Мусабаев Т.Т. Современное состояние исследований по нелинейной теории расчета оболочек и пластин / Т.Т. Мусабаев, К.М. Жансеитова // Наука и техника Казахстана. – 2003. – №3. – С. 66-73.
  61. Муштари Х. М. Поперечный изгиб опертой квадратной пластинки при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением / Х. М. Муштари, Р. Г. Суркин // Казань, изд. Казанского фил. АН СССР, сер. физ.-мат. наук. – 1961. – Вып. 14.
  62. Муштари Х. М. Средний изгиб пологой сферической панели, квадратной в плане, при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением / Х.



- М. Муштари, Р. Г. Суркин // Журнал прикл. и техн. физики. – 1960. – №2. – С. 162- 165.
63. Нгуен Хиеп Донг. Применение метода последовательных аппроксимаций к расчету пологих оболочек / Нгуен Хиеп Донг // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2008. – 139 с.
64. Нгуен Хоанг Ань. Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету оболочек / Нгуен Хоанг Ань // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2015. – 126 с.
65. Низомов Д.Н. Численное решение динамических задач по расчету балок, плит и пологих оболочек / Д.Н. Низомов // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1983. – 169 с.
66. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде / В. В. Новожилов // ПММ. – 1951. – Т. 15(2).
67. Новожилов В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов // Л.: Судпромгиз. – 1958. – 371 с.
68. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак // М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре. – 1954. – 56 с.
69. Рогалевич В.В. Новый приближенный метод расчета гибких пластин постоянной и переменной толщины / В.В. Рогалевич, С.А. Тимашев // Академический вестник УРАЛНИИПРОЕКТ РААСН. – 2012. – №1. – С. 67-71.
70. Рогалевич В.В. Эффективный приближенный метод расчета гибких пластин / В.В. Рогалевич, С.А. Тимашев // Академический вестник УРАЛНИИПРОЕКТ РААСН. – 2012. – №3. – С. 60-65.
71. Рыскин В.Я. Численный метод расчета сжато-изогнутых стержней и пластин на динамические нагрузки / В.Я. Рыскин // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1993 – 196 с.
72. Савенков А.Ю. Нелинейный расчет железобетонного сооружения на воздействие воздушной ударной волны / А.Ю. Савенков, О.В. Мкртычев // Вестник МГСУ. – 2019. – Т. 14(1). – С. 33–45. DOI 10.22227/1997-0935.2019.1.33-45.

73. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания стержней / А.Ф. Смирнов // М.: Трансжелдориздат. – 1958. – 572 с.
74. Соломон Т.Д. Применение метода последовательных аппроксимаций к расчету ортотропных изгибаемых пластин // Дисс. канд. техн. наук. М. 2004. – 102 с.
75. Ступишин Л.Ю., Колесников А.Г., Озерова Т.А. Исследование напряженно-деформированного состояния пологих геометрически нелинейных оболочек на круглом плане переменной формы при различных видах нагружения / Л.Ю. Ступишин, А.Г. Колесников, Т.А. Озерова // ПГС. – 2013. – №5. – С. 33-34.
76. Тамразян А.Г. Расчет большепролетной конструкции на аварийные воздействия методами нелинейной динамики / А.Г. Тамразян, О.В. Мкртычев, В.Б. Дорожинский // Научно-технический вестник Поволжья «Технические науки». – 2012. – №5. – С. 331-334.
77. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов / С.П. Тимошенко // Перевод с английского Контовта В. И. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1957. – 537 с.
78. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер // М.: Наука. – 1963. – 636 с.
79. Травуш В.И. Численное моделирование физически нелинейной динамической реакции высотных зданий при сейсмических воздействиях уровня МРЗ / В.И. Травуш, А.М. Белостоцкий, В.В. Вершинин, К.И. Островский, Н.О. Петряшев, С.О. Петряшев // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2016. – Т. 12(1). – С. 117-139.
80. Трещев А.А. Расчет напряженно-деформированного состояния трехслойной гибкой пластины из анизотропных разносопротивляющихся материалов с учетом больших прогибов / А.А. Трещев // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2012. – Выпуск 2. – С. 179-187.
81. Филатов В.В. Изгиб гибких пластин при действии кусочно-постоянной нагрузки / В.В. Филатов, Н.К. Дао // Актуальные проблемы строительной

- отрасли и образования: Первой Национальной конференции. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ – 2020. – С. 198-203.
82. Филатов В.В. К расчету составных балок на упругом основании / В.В. Филатов // Вестник МГСУ. – 2009. – №4. – С. 73-76.
  83. Филатов В.В. К расчету составных балок по теории А.Р. Ржаницына / В.В. Филатов // Вестник МГСУ. – 2009. – №4. – С. 70-72.
  84. Филатов В.В. К расчету составных пластин переменной жесткости / В.В. Филатов // Academia. Архитектура и строительство. – 2009. – №4. – С. 79-81.
  85. Филатов В.В. К расчету составных стержней переменного сечения / В.В. Филатов // Вестник МГСУ. – 2009. – №2. – С. 50-53.
  86. Филатов В.В. О расчете неразрезных составных балок / В.В. Филатов // Промышленное и гражданское строительство. – 2009. – №8. – С. 59-60.
  87. Филатов В.В. О расчете составных балок на упругом основании с двумя коэффициентами постели / В.В. Филатов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №3. – С. 38-40.
  88. Филатов В.В. О расчете составных пластин на винклеровском основании / В.В. Филатов // Промышленное и гражданское строительство. – 2010. – №11. – С. 48-49.
  89. Филатов В.В. Об учете податливости поперечных связей в расчетах составных пластин по теории А. Р. Ржаницына / В.В. Филатов, С. Мусса // Промышленное и гражданское строительство. – 2010. – №2. – С. 28-29.
  90. Филатов В.В. Развитие теории и разработка численной методики расчета составных стержней и пластин / В.В. Филатов // Дисс. докт. техн. наук. – М., 2014. – 292 с.
  91. Филатов В.В. Расчет двухслойной составной балки, свободно лежащей на упругом основании / В.В. Филатов, Б.Ф. Кужин, К.Х. Тхи Линь // Вестник МГСУ. – 2020. – Т. 15(12). – С. 1685-1692.
  92. Филатов В.В. Расчет сжато-изогнутых балок и пластин на несплошном упругом основании / В.В. Филатов // М.: Методические указания, МГСУ. – 2009. – 67 с.

93. Филатов В.В. Расчет сжато-изогнутых балок и плит на несплошном упругом основании / В.В. Филатов // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1999. – 160 с.
94. Филатов В.В. Расчет сжато-изогнутых балок и плит на несплошном упругом основании / В.В. Филатов // Дисс. канд. техн. наук. – М., 1999. – 160 с.
95. Филатов В.В. Расчет сквозных балок по теории составных стержней А.Р. Ржаницына / В.В. Филатов // Вестник МГСУ. – 2013. – №9. – С. 23-31.
96. Филатов В.В. Расчет составных пластин на винклеровском основании с кусочно-постоянным коэффициентом постели / В.В. Филатов // Интернет-вестник ВолгГАСУ. – 2014. – №2(33). – С. 22.
97. Филатов В.В. Расчет трехслойных неразрезных балок по теории составных стержней А.Р. Ржаницына / В.В. Филатов, Л.К.Х. Тхи // В сборнике: Актуальные проблемы строительной отрасли и образования. Сборник докладов Первой Национальной конференции. – 2020. – С. 204-209.
98. Филоненко-Бородич М.М. Некоторые приближенные теории упругого основания / М.М. Филоненко-Бородич // Ученые записки МГУ. – 1940. – Вып. 46. – С. 116-122.
99. Хоанг Туан Ань. Обобщенные уравнения метода конечных разностей в задачах расчета изгибаемых пластин средней толщины на динамические нагрузки / Хоанг Туан Ань // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2014. – 125 с.
100. Чан Тхань Тунг. Численный метод расчета арок по предельному равновесию / Чан Тхань Тунг // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2011. – 134 с.
101. Шлычков С.В. Расчет геометрически нелинейной конструкции методом конечных элементов / С.В. Шлычков, С.Л. Иванов, С.Г. Кузовков, Ю.В. Лоскутов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2008. – №4. – С. 145-152.
102. Юссуф Берте. Расчет клиновидных складчатых систем по нелинейной теории / Юссуф Берте. // Дисс. канд. техн. наук. – М., 2004. – 118 с.
103. Ahmad Rahbar-Ranji. Bending analysis of thin plates with variable thickness resting on elastic foundation by element free galerkin method / Ahmad Rahbar-Ranji, E. Bahmyari // Journal of Mechanics. – September 2012. – Vol. 28(3). – Pp. 479–488.

104. Akyuz F. A. Solution of Nonlinear Problems of Elastoplasticity by the Finite Element Method / F. A. Akyuz and J. E. Merwin // *AIAA Journal*. – Oct. 1968. – Vol. 6(10). – Pp. 1825-1831.
105. Altekin M. Large deflection analysis of clamped circular plates / M. Altekin and R. Yukseler // In: *Proceedings of the World Congress on Engineering, London*. – 2011. – Vol. 3 (Online).
106. Al-Tholaia M.M.H. RBF-based meshless method for large deflection of elastic thin plates on nonlinear foundations / M.M.H. Al-Tholaia, H.J. Al-Gahtani // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2015. – Vol. 51. – Pp. 146–155.
107. Alzheimer W. E. Nonlinear Unsymmetrical Bending of an Annular Plate / W. E. Alzheimer and R. T. Davis // *J. of Appl. Mech., Trans. of the A. S. M. E.* – March 1968. – Pp. 190-192.
108. Argyris J. H. Continua and Discontinua / J. H. Argyris // *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio*. – 1966. – Pp. 66-80.
109. Argyris J. H. Matrix Analysis of Three-Dimensional Elastic Media, Small and Large Displacements / J. H. Argyris // *AIAA Journal*. – Jan. 1965. – Vol. 3(1). – Pp. 45-51.
110. Argyris J. H. Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis / J. H. Argyris // *Progress in Aeronautical Sciences, Pergamon Press, London, New York*. – 1963. – Vol. 4. – Pp. 115-145.
111. Bakker M.C.M. Approximate large-deflection analysis of simply supported rectangular plates under transverse loading using plate post-buckling solutions / M.C.M. Bakker, M. Rosmanit, H. Hofmeyer // *Thin-Walled Struct.* – 2008. – Vol. 46. – Pp. 1224-1235.
112. Berger H. M. A new approach to the analysis of large deflections of plates / H. M. Berger // *J. appl. Mech.* – 1955. – Vol. 22. – Pp. 465.
113. Berger H.M. A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates // Ph. D. thesis, California Institute of Technology Pasadena, California. – 1954.
114. Bitaraf M. Large deflection analysis of flexible plates by the meshless finite point

- method / M. Bitaraf, S. Mohammadi // *Thin-Walled Struct.* – 2010. – Vol. 48. – Pp. 200–214.
115. Bolton R. Stresses in circular plates on elastic foundations / R. Bolton // *J. Eng. Mech. Div. A.S.C.E., EM3.* – 1972. – Vol. 98. – Pp. 629-640.
116. Boobnoff I. G. On the stresses in ship's bottom plating due to water pressure / I. G. Boobnoff // *Trans. Instn nav. Archir.* – 1902. – Vol. 44(15).
117. Boresi A.P. Large deflections of rectangular plates / A.P. Boresi, J.P. Turner // *Int. J. Non Linear Mech.* – 1983. – Vol. 18. – Pp. 125–131.
118. Borisovich A. Bifurcations in von Karman problem for rectangular, thin, elastic plate resting on elastic foundation of Winkler type / A. Borisovich, J. Dymkowska, C. Szymczak // *Appl. Math. Res. Express.* – 2006. – Vol. 1. – Pp. 1-24.
119. Chia C. Y. Nonlinear analysis of plate / C. Y. Chia // McGraw-Hill International Book Co. CA. – 1980. – 422 p.
120. Chien W. Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection / W. Chien // In: *Science Reports (A) of National Tsinghua University.* – 1948. – Pp. 1-24.
121. Chien W. Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure / W. Chien // *Chinese J. Phys.* – 1947. – №7. – Pp. 102-113.
122. Chien W. On the large deflection of circular plates / W. Chien, and K Yeh // *China Science.* – 1954. – №3. – Pp. 405-436.
123. Chien W. Z. On the large deflection of rectangular plates / W. Z. Chien and K. Y. Yeh // *Proc. 9th Inr. Congr. appl. Mech., Brussels.* – 1957. – Vol. 6. – Pp. 403.
124. Chien W., Lin H., Hu H. and Yeh K. Large Deflection Problems of Circular Thin Plates // Beijing: Science Press. 1956.
125. Civalek Ö. Discrete singular convolution method for the analysis of Mindlin plates on elastic foundations / Ö. Civalek, M.H. Acar // *Int. J. Press. Vessels Pip.* – 2007. – Vol. 84. – Pp. 527-535.
126. Civalek Ö. Fundamental frequency of isotropic and orthotropic rectangular plates with linearly varying thickness by discrete singular convolution method / Ö. Civalek // *Appl. Math. Model.* – 2009. – Vol. 33. – Pp. 3825-3835.

127. Civalek O. Nonlinear analysis of thin rectangular plates on Winkler–Pasternak elastic foundations by DSC-HDQ methods / O. Civalek // *Appl. Math. Model.* – 2007. – Vol. 31(3). – Pp. 606-624.
128. Da Silva P. Numerical solution of the von Karman equations for a thin plate / P. Da Silva and W. Krauth // *International Journal of Modern Physics C.* – 1997. – №8. – Pp. 427-434.
129. Dai H. Solutions of the von Kármán plate equations by a Galerkin method, without inverting the tangent stiffness matrix / H. Dai, X. Yue, S. Atluri // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2014. – Vol. 9. – Pp. 195–226.
130. Das D. Large deflection analysis of skew plates under uniformly distributed load for mixed boundary conditions / D. Das, P. Sahoo, K. Saha // *Int. J. Eng. Sci. Technol.* – 2010. – Vol. 2. – Pp.100–112.
131. Datta S. Large deflection of a circular plate on elastic foundation under a concentrated load at the center / S. Datta // *ASME Journal of Applied Mechanics.* – 1985. – Vol. 52. – Pp. 385-388.
132. Datta S. Large deflection of circular plate on elastic foundation under symmetric loads / S. Datta // *J. Struct. Mech.* – 1974. – Vol. 3. – Pp. 331-343.
133. Davood Younesian. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications / Davood Younesian, Ali Hosseinkhani, Hassan Askari, Ebrahim Esmailzadeh // *Nonlinear Dynamics.* – 2019. – Vol. 97. – Pp.853–895. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>.
134. Demir C. A new nonlocal FEM via Hermitian cubic shape functions for thermal vibration of nano beams surrounded by an elastic matrix / C. Demir, Ö. Civalek // *Compos. Struct.* – 2017. – Vol. 168. – Pp. 872–884.
135. Dumir P. C. Large deflection axisymmetric analysis of orthotropic annular plates on elastic foundations / P. C. Dumir // *Int. J. Solids Structures.* – 1988. – Vol. 24(8). – Pp. 777-787.
136. Dumir P.C. Nonlinear static analysis of rectangular plates on elastic foundations by the orthogonal point collocation method / P.C. Dumir, A. Bhaskar // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* – 1988. – Vol. 67(1). – Pp. 111–124.

137. Eren I. Analyses of large deflections of simply supported nonlinear beams, for various arc length functions / I. Eren // Arab. J. Sci. Eng. – 2013. – Vol. 38. – Pp. 947-952.
138. Foppl A. Drang und Zwang / A. Foppl and L. Foppl // R. Oldenbourg. – 1920. – Pp. 230-232.
139. Gajendra N. Large amplitude vibration of plates on elastic foundations / N. Gajendra // Int. J. Non-linear Mech. – 1967. – Vol. 2. – Pp. 163-172.
140. Green J. R. Problems relating to large transverse displacements of thin elastic plates / J. R. Green and R. V. Southwell // Phil. Trans. R. SOC. – 1940. – Vol. 46(239) (Series A). – Pp 539-578.
141. Hencky H. Die Berechnung dunner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungsteifigkeit / H. Hencky // Z. angew. Math. Mech. – 1921. – Vol. 1. – Pp. 81-84.
142. Hetenyi M. A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity /M. Hetenyi // Journal of Applied Physics. – 1950. – Vol. 21. – Pp. 55-58.
143. Hetenyi M. Beams on Elastic Foundations // The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan. – 1946.
144. Holl H.J. Efficient series solutions for shear forces of vibrating thin rectangular plates on elastic foundation with thermal loads / H.J. Holl, W. Liu // PAMM. – 2011. – Vol. 11(1). – Pp. 223–224.
145. Hooke R. Approximate analysis of the large deflection elastic behaviour of clamped, uniformly loaded, rectangular plates / R. Hooke // Journal Mechanical Engineering Science. – 1969. – Vol. 11(3). – Pp. 256-268.
146. Horibe T. An analysis for large deflection problems of beams on elastic foundation by boundary integral equation method / T. Horibe // Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. (in Japanese). – 1987. – Vol. 53(487). – Pp. 622-629.
147. Horibe T. An integral equation method for elastic bending of rectangular plates / T. Horibe // Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese). – 1989. – Vol. 55. – Pp. 1548-1553.
148. Horibe T. Boundary integral equation method analysis for beam-columns on



- elastic foundation / T. Horibe // *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.* (in Japanese). – 1996. – Vol. 62(601). – Pp. 2067-2071.
149. Hussein Al-Tholaia M.M. RBF-based meshless method for large deflection of elastic thin rectangular plates with boundary conditions involving free edges / M.M. Hussein Al-Tholaia, H.J. Al-Gahtani // *Math. Probl. Eng.* – 2016. – Vol. 2016 – Pp. 1-10. DOI:10.1155/2016/6489375.
150. Iyengar K.T.S.R. Large deflections of rectangular plates / K.T.S.R. Iyengar, M.M. Naqvi // *Int. J. Non Linear Mech.* – 1966. – №1. – Pp. 109-122.
151. Jianjao Ye. An alternative approach for large deflection analysis of axisymmetric plates on elastic foundation / Jianjao Ye // *Communications in numerical methods in engineering.* – 1994. – Vol. 10. – Pp.623-632.
152. Jones R. The Vlasov foundation model / R. Jones, J. Xenophontos // Pergamon Press. *International Journal of Mechanical Science.* – 1977. – Vol. 19. – Pp. 317-323.
153. Kamiya N. An integral equation approach to finite deflection of elastic plates / N. Kamiya, Y. Sawaki // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 1984. – Vol. 17(3). – Pp. 187-194.
154. Kamiya N. Integral formulation for nonlinear bending of plates - Formulation by weighted residual method / N. Kamiya, Y. Sawaki // *Zeit. ang. Math. Mech.* – 1982. – Vol. 62. – Pp. 651-655.
155. Katsikadelis J.T. Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral equation method / J.T. Katsikadelis and A.E. Armenakas // *Trans. Of the ASME.* – 1984. – Vol. 51. – Pp. 574-580.
156. Katsikadelis J.T. Large deflection analysis of plates on elastic foundation by the boundary element method / J.T. Katsikadelis// *Int.J. Solids Structures.* – 1991. – Vol.27(15). – Pp. 1867-1878.
157. Katsikadelis J.T. Large deflections of thin plates by the boundary element method / J.T. Katsikadelis, M.S. Nerantzaki // In C.A Brebbia (ed.), *Boundary Elements*, Berlin, Springer-Verlag. – 1988. – Vol. 3. – Pp. 435-456.
158. Katsikadrlis J.T. Plates on biparametric elastic foundation by the BDIE method / J.T. Katsikadrlis and L.F. Kallivokas // *J. Eng. Mech.* – 1988. – Vol. 114(5). – Pp. 847-875.

159. Kawai T. Analysis of large deflection of plates by the finite element method / T. Kawai, N. Yoshimura // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 1969. – Vol. 1. – Pp. 123-133.
160. Levy S. Bending of rectangular plates with large deflections / S. Levy // *Natl. Bur. Stand. Gaithersbg, N.A.C.A.* – 1942. – Report №846.
161. Levy S. Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections / S. Levy // *N.A.C.A.* – 1942. – Report №740.
162. Liang D. Wavelet Galerkin methods for Aerosol dynamic equations in atmospheric environment / D. Liang, Q. Guo and S. Gong // *Communications in Computational Physics.* – 2009. – №6. – Pp. 109-130.
163. Liu X.J. A wavelet method for solving a class of nonlinear boundary value problems / X.J. Liu, Y.H. Zhou, X.M. and J.Z. Wang // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2013. – №18. – Pp. 1939-1948.
164. Liu Y. The 2D large deformation analysis using Daubechies wavelet / Y. Liu, F. Qin, Y.H. Liu and Z.Z. Cen // *Computational Mechanics.* – 2010. – №45. – Pp. 179-187.
165. Li-zhou P. A perturbation-variational solution of the large deflection of rectangular plates under uniform load / P. Li-zhou, W. Shu // *Appl. Math. Mech.* – 1986. – Vol. 7. – Pp. 727-740.
166. Madyan A. Al-Shugaa. Automated Ritz Method for Large Deflection of Plates with Mixed Boundary Conditions /Madyan A. Al-Shugaa, Husain J. Al-Gahtani, Abubakr E. S. Musa // *Arabian Journal for Science and Engineering.* - 28 May 2020. <https://doi.org/10.1007/s13369-020-04642-z>.
167. Mallett R. H. Nonlinear Structural Analysis by Energy Search / R. H. Mallett and L. A. Schmit // *J. of the Struct. Div. Proceedings of the A. S. C. E.* – June 1967. – Vol. 93(ST3). – Pp. 221-234.
168. Marcal P. V. Large Deflection Analysis of Elastic-Plastic Shells of Revolution / P. V. Marcal // *Proceedings of the AIAA/ASME 10th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. New Orleans, La.,* – April 1969. – Pp. 369-379.
169. Martin H. C. On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems / H. C. Martin// *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, TR-66-80.* 1966.

170. Miyake S. Geometrically nonlinear bifurcation analysis of elastic arch by the boundary-domain element method / S. Miyake, M. Nonaka and N. Tosaka // *Boundary Element XII.* – 1990. – Vol. 1. – Pp. 503-514.
171. Murray D. W. Finite-Element Large Deflection Analysis of Plates / D. W. Murray and E. L. Wilson // *J. of the Engr. Mech. Div., Proceedings of the A. S.C. E.* – Feb. 1969. – Vol. 95. – Pp.143-165.
172. Nath Y. Large amplitude response of circular plates on elastic foundation / Y. Nath // *Int. J. Non-linear Mech.* – 1982. – Vol. 17(4). – Pp. 285-296.
173. Nath Y. Nonlinear dynamic analysis of orthotropic annular plates resting on elastic foundations / Y. Nath and R. K. Jain // *Earthquake Engng Struct. Dyn.* – 1983. – Vol. 11. – Pp. 785.
174. Nerantzaki M.S., Katsikadelis J.T. A Green's function method for large deflection analysis of plates / M.S. Nerantzaki, J.T. Katsikadelis // *Acta Mech.* – 1988. – Vol. 75. – Pp. 211-225.
175. Ngoc Khoa Dao. Comparison of calculation results of flexible plates on the basis of difference equations of successive approximation method and generalized equations of finite difference method /Ngoc Khoa Dao, Radek Gabbasov, Hoang Thi Linh Quyen and Le Thuy Nguyen // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering.* – 2020. – Vol. 913 – Pp. 022002. doi:10.1088/1757-899X/913/2/022002.
176. Novozhilov V.V. Foundations of the nonlinear theory of elasticity / V.V. Novozhilov // Rochester, N.Y., Graylock Press. – 1953. – 233 p.
177. Oden J. T. Finite elements of nonlinear continua / J. Oden // New York, McGraw-Hill. – 1972. – 432 p.
178. Oden J. T. Numerical Formulation of Nonlinear Elasticity Problems / J. Oden // *J. of the Struct. Div. Proceedings of the A. S. C. E.* – June 1967. – Vol. 93(ST3). – Pp. 235-255.
179. Okodi A. Exact large deflection analysis of thin rectangular plates under distributed lateral line load / A. Okodi, Y.N. Ziraba, A.J. Mwakali // *In: Second International Conference on Advances in Engineering and Technology*

- Approximate. – 2005. – Vol. 137. – Pp. 422-430.
180. Pan B. Analytical bending solutions of clamped rectangular thin plates resting on elastic foundations by the symplectic superposition method / B. Pan, R. Li, Y. Su, B. Wang, Y. Zhong // *Applied Mathematics Letters*. – March 2013. – Volume 26(3). – Pp. 355-361.
181. Puttonen J. Boundary element analysis of plate on elastic foundation / J. Puttonen and P. Varpasuo // *Intern. J. of Numer. Methods in Eng.ng.* – 1986. – Vol. 23. – Pp. 287-303.
182. Qiang Yu. Nonlinear analysis for extreme large bending deflection of a rectangular plate on non-uniform elastic foundations /Qiang Yu, Hang Xu, Shijun Liao // *Applied Mathematical Modelling*. – 2018. – Vol. 61. – Pp. 316-340. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.04.022>.
183. Radek Gabbasov. Numerical research of bending flexible plates /Radek Gabbasov, Vladimir Filatov and Ngoc Khoa Dao // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* – 2019. – Vol. 661 – Pp. 012006. doi:10.1088/1757-899X/661/1/012006.
184. Ramberg W., Mepherston A. E. and Levy S. Normal pressure tests of rectangular plates / W. Ramberg, A. E. Mepherston and S. Levy // *N.A.C.A.* – 1942. – Report №748.
185. Rashed Y.F. The boundary element method for thick plates on Winkler foundation / Y.F. Rashed, M.H. Aliabadi and C.A. Brebbia // *Intern. J. of Numer. Methods in Engng.* – 1998. – Vol. 41. – Pp. 1435-1462.
186. Razdolsky A.G. Large deflections of elastic rectangular plates / A.G. Razdolsky // *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.* – 2015. – Vol. 16. – Pp. 354–361.
187. Restrepo J.M. Wavelet-Galerkin discretization of hyperbolic equations / J.M. Restrepo and G.K. Leaf // *Journal of Computational Physics*. – 1995. – №122. – Pp. 118-128.
188. Sapoutzakis E.J. Unilaterally supported plates on elastic foundations by the boundary element method / E.J. Sapoutzakis and J.T. Katsikadelis // *Trans. Of the ASME*. – 1992. – Vol. 59. – Pp. 580-586.
189. Schmit L. A. Finite Deflection Structural Analysis Using Plate and Shell Discrete

- Elements / L. A. Schmit, F. K. Bogner and R. L. Fox // *AIAA Journal*. – May 1968. – Vol. 6(5). – Pp. 781-791.
190. Seguni M. Nonlinear analysis of deep beam resting on linear and nonlinear random soil / M. Seguni, D. Nedjar // *Arab. J. Sci. Eng.* – 2017. – Vol. 42. – Pp. 3875-3893.
191. Shen H.S. Nonlinear bending of simply supported rectangular Reissner–Mindlin plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations / H.S. Shen // *Eng. Struct.* – 2000. – Vol. 22(7). – Pp. 847-856.
192. Shen H.S. Nonlocal plate model for nonlinear analysis of thin films on elastic foundations in thermal environments / H.S. Shen // *Compos. Struct.* – 2011. – Vol. 93(3). – Pp. 1143-1152.
193. Sinha S.N. Large deflections of plates on elastic foundations / S.N. Sinha // *J. Engng Mechanics, ASCE*. – 1963. – Vol. 89. – Pp. 1–24.
194. Sladek J. A meshless method for large deflection of plates / J. Sladek, V. Sladek // *Comput. Mech.* – 2003. – Vol. 30. – Pp. 155-163.
195. Sladek J. The BIE Analysis of the Berger equation / J. Sladek, V. Sladek // *Ingenieur-Archiv*. – 1983. – Vol. 53. – Pp. 385-397.
196. Stricklin J. A. Nonlinear Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method / J. A. Stricklin, W. E. Haisler, H. R. Mac Dougall and F. J. Stebbins // *AIAA Journal*. – Dec. 1968. – Vol. 6(12). – Pp. 2306-2312.
197. Ta Duy Hien. Analysis of isotropic rectangular plate resting on non-uniform elastic foundation using Ritz approach / Ta Duy Hien, Bui Thanh Quang // *Materials Today: Proceedings*. – 2019. – Vol. 19. – Pp.158-160.
198. Tadahiko kawai. Analysis of large deflection of plates by the finite element method / Tadahiko kawai, Nobutoshi yoshimura // *International journal for numerical methods in engineering*. – 1969 – Vol. 1. – Pp. 123-133.
199. Tadashi Horibe. Large deflection analysis of rectangular plates on two parameter elastic foundation by the boundary strip method / Tadashi Horibe, Naoki Asano // *JSME International Journal, Series A*. – 2001. – Vol. 44(4). – Pp. 483-489.
200. Tanaka M. BEM analysis of finite deflection problems for von Karman-type plates

- / M. Tanaka, T. Matsumoto and Z. Zheng // *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), – 1995. – Vol. 61(589). – Pp. 217-223.
201. Tanaka M. Large deflection analysis of thin elastic plates / M. Tanaka // *Developments in Boundary Element Methods-3*, ed. by Banerjee, P. K. and Mukherjee, S., Elsevier Applied Science Publishers, London. – 1984. – Pp. 115-136.
202. Tezcan S.S. Nonlinear Analysis of Thin Plates by Framework Method / S.S. Tezcan // *AIAA Journal*. – Oct. 1967. – Vol. 5(10). – Pp. 1890-1892.
203. Turner M. J. Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads / M. J. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin and R. J. Melosh // *J. of the Aerospace Sciences*. – 1960. – Pp. 97-106.
204. Vincent J. The bending of a thin circular plate / J. Vincent // *Phil. Mag.* – 1931. – №12. – Pp. 185-196.
205. Von Karman T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau / T. Von Karman // *Encycl der Math Wiss.* – 1910. – Vol. 4. – Pp. 348-351.
206. Von Karman, T. Festigkeits problem in maschinenbau // *Encycl. Der math. Wiss.* – 1910. – № 4. – Pp. 348-351.
207. Waidemam L. BEM formulation for von Karman plates / L. Waidemam, W. Venturini // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2009. – №33. – Pp. 1223-1230.
208. Wang C.T. Bending of rectangular plates with large deflections / C.T. Wang // *N.A.C.A. Tech.* – 1948. – Note №1462.
209. Wang D. Large-deflection mathematical analysis of rectangular plates / D. Wang, A.I. El-Sheikh // *J. Eng. Mech.* – 2005. – Vol. 131. – Pp. 809-821.
210. Wang X. A wavelet method for bending of circular plate with large deflection / X. Wang, X. Liu, J. Wang, Y. Zhou // *Acta Mech. Solida Sin.* – 2015. – Vol. 28. – Pp. 83-90.
211. Way S. Uniformly loaded, clamped, rectangular plates with large deflections / S. Way // *Proc. 5th Inr. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass. – 1938. – №123.
212. Xiaomin Wang. A wavelet method for bending of circular plate with large deflection / Xiaomin Wang, Xiaojing Liu, Jizeng Wang, Youhe Zhou // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – February, 2015. – Vol. 28(1). – Pp. 83-90.

213. Xu-ming S. Large deflection analysis of rectangular plates by combined perturbation and finite strip method / S. Xu-ming, Z. Zu-wu // *Appl. Math. Mech.* – 1991. – Vol. 12. – Pp. 55-59.
214. Yamaki N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates / N. Yamaki // *ZAMM Zeitschrift für Angew. Math. und Mech.* – 1961. – Vol. 41. – Pp. 501-510.
215. Yang T.Y. A finite-element analysis of plates on a two-parameter foundation model / T.Y. Yang // *Pergamon Press. Computrs and Structures.* – 1972. – Vol. 2. – Pp. 593-614.
216. Ye T.Q. and Liu Y. Finite deflection analysis of elastic plate by the boundary element method / T.Q. Ye and Y. Liu // *Appl. Math. Modelling.* – June 1985. – Vol. 9. – Pp. 183-188.
217. Yu Q. Coiflets solutions for Föppl–von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach / Q. Yu, H. Xu, S. Liao // *Numer. Algorithms.* – 2018. – Vol. 79. – Pp. 993-1020.
218. Zhang L. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates / L. Zhang, J. Wang, Y.H. Zhou // *Arch. Appl. Mech.* – 2014. – Vol. 85. – Pp. 355-365.
219. Zheng X. and Zhou Y. On the problem of transition from von Karman plate equations to theory of membrane / X. Zheng and Y. Zhou // *Journal of Lanzhou University.* – 1991. – №27. – Pp. 18-25.
220. Zheng X. Large Deflection Theory of Circular Thin Plate and Its Application / X. Zheng // *Jilin: Jilin Science Technology Press.* – 1990.
221. Zheng X. On the convergence of the Chien's perturbation method for von Karman plate equations / X. Zheng, J. Lee // *International Journal of Engineering Science.* – 1995. – №33. – Pp. 1085-1094.
222. Zheng X. Research on Exact and Approximately Analytical Solutions to Axisymmetric Karman Equations under Arbitrary Loads / X. Zheng // *Ph.D. thesis, Lanzhou: Lanzhou University.* – 1987.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

*Список публикаций автора по теме диссертационной работы*

**Публикации в изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:**

1. **Дао Нгок Кхоа**. Численное исследование изгиба гибких пластин на упругом основании / **Дао Нгок Кхоа**, В.В. Филатов, Т.Л.К. Хоанг // Инновации и инвестиции. – 2022. – №1. – С. 152-156.

**Статьи, опубликованные в журналах, индексируемых в международных реферативных базах Scopus и др:**

1. **Ngoc Khoa Dao**. Comparison of calculation results of flexible plates on the basis of difference equations of successive approximation method and generalized equations of finite difference method /**Ngoc Khoa Dao**, Radek Gabbasov, Hoang Thi Linh Quyen and Le Thuy Nguyen // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. Vol. 913. – Pp. 022002. doi:10.1088/1757-899X/913/2/022002.

2. Radek Gabbasov. Numerical research of bending flexible plates / Radek Gabbasov, Vladimir Filatov and **Ngoc Khoa Dao** // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering – 2019. – Vol. 661. – Pp. 012006. doi:10.1088/1757-899X/661/1/012006.

3. Radek Gabbasov. Analysis of bending plates with mixed boundary conditions using generalized equations of finite difference method / Radek Gabbasov, Vladimir Filatov, **Ngoc Khoa Dao** and Thi Linh Quyen Hoang // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 913. – Pp. 022018. doi:10.1088/1757-899X/913/2/022018.

**Статьи, опубликованные в других научных журналах и изданиях:**

1. Филатов В.В. Изгиб гибких пластин при действии кусочно-постоянной нагрузки / В.В. Филатов, **Н.К. Дао** // Актуальные проблемы строительной отрасли и образования: Первой Национальной конференции. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ – 2020. – С. 198-203.



## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Программы расчетов для ЭВМ с использованием пакета прикладных программ MATLAB

Расчет квадратной пластинки с двумя шарнирными и двумя заделанными сближающимися краями

```

clear all;
n=32;
h=1/n;
E=0.75*10^6.0;
a=10.0;
qr=0.5;
H=0.1;
muy=0.316;
D=E*H^3/(12*(1-muy^2));
k=E*H*a^2/D;
q=qr*a^3/D;
% q=7.2;
g=q*ones(n+1,n+1);
Delta=1000.0;
count=0;
mcount=[];
mdelta=[];
moment=[];
while (Delta>0.001)
    % for i=1:1
    g0=g;
    [AA,BB,Af,l,n1,t,b,c,d,fi,mw,w2,w3,m2,lamda,lamda1]=solveee(n,g,h,k);
    [g11,w11]=findgw(g,lamda1,w3,q);
    g=(g0+g11)/2.0;
    Deltag=abs(g0-g);
    Delta=Deltag*((n+2)/2,(n+2)/2);
    count=count+1;
    mcount=[mcount count];
    mdelta=[mdelta w11((n+2)/2,(n+2)/2)];
    moment=[moment m2((n+2)/2,(n+2)/2)];
end
[lshi,neta,tshieta]=diff2(w2,m2,h);
mshi=-(lshi+neta.*muy);
meta=-(neta+lshi.*muy);
My=mshi.*D/a;
Mx=meta.*D/a;
sigmaXmaxiz=6*Mx/H^2;
sigmaYmaxiz=6*My/H^2;
SigmaX=b*D/(H*a^2);
SigmaY=c*D/(H*a^2);
sigmaX=SigmaX+sigmaXmaxiz;
sigmaY=SigmaY+sigmaYmaxiz;
plot(mcount,moment);
[m1,n2]=meshgrid(1:n+1,1:n+1);
mesh(m1,n2,-sigmaX);
title 'Diagram of stress sigmaX ';
figure;
plot(mcount,moment);
[m1,n2]=meshgrid(1:n+1,1:n+1);
mesh(m1,n2,-sigmaY);
title 'Diagram of stress sigmaY ';
figure;
plot(mcount,mdelta);

```

```

[m1,n2]=meshgrid(1:n+1,1:n+1);
mesh(-m1,-n2,-w11);
title 'Diagram of deflection w';
figure;
plot(mcount,moment);
[m1,n2]=meshgrid(1:n+1,1:n+1);
mesh(-m1,-n2,-m2);
figure;
plot(mcount,moment);
[m1,n2]=meshgrid(1:n+1,1:n+1);
mesh(-m1,-n2,-Mx);
title 'Diagram of bending moment Mx';
figure;
plot(mcount,moment);
[m1,n2]=meshgrid(1:n+1,1:n+1);
mesh(-m1,-n2,-My);
title 'Diagram of bending moment My';
figure;
plot(mcount,mdelta);
grid on;
xlabel('number of iterative circle');
ylabel('wmax (x10cm)');
function [l,n,t]=diff2(w,m,h)
    [M,N]=size(w);
    for i=1:M
        for j=1:N
            if (i>1 && j>1 && i<M && j<N)
                l(i,j)=1.0/(2.0*h^2)*w(i-1,j)-1.0/(2.0*h^2)*w(i,j-1)-
1.0/(2.0*h^2)*w(i,j+1)+1.0/(2.0*h^2)*w(i+1,j)+1.0/20.0*m(i-1,j)-1.0/20.0*m(i,j-1)-
1.0/2.0*m(i,j)...
                -1.0/20.0*m(i,j+1)+1/20.0*m(i+1,j);
                n(i,j)=-m(i,j)-l(i,j);
                t(i,j)=1.0/4.0/h^2*(w(i-1,j-1)-w(i-1,j+1)-w(i+1,j-1)+w(i+1,j+1));
            else
                if (i==1 && j>1 && j<N)
                    l(i,j)=-m(i,j);
                    n(i,j)=0;
                    t(i,j)=0;
                end
                if (i==M && j>1 && j<N)
                    l(i,j)=-m(i,j);
                    n(i,j)=0;
                    t(i,j)=0;
                end
                if (j==1 && i>1 && i<M)
                    l(i,j)=0;
                    n(i,j)=-m(i,j);
                    t(i,j)=0;
                end
                if (j==N && i>1 && i<M)
                    l(i,j)=0;
                    n(i,j)=-m(i,j);
                    t(i,j)=0;
                end
            end
        end
    end
end
function [AA,BB,Af,l,n1,t,b,c,d,fi,mw,w2,w3,m2,lamda,lamda1]=solvee(n,g,h,k)
    [AA,BB]=Matr(n,g);
    mw = linsolve(AA,BB);
    m=mw(1:(n+1)^2);
    w=mw((n+1)^2+1:2*(n+1)^2);
    m2=vec2matr(m,n+1);

```

```

w2=vec2matr(w,n+1);
w3=w2(2:end-1,2:end-1);
[l,n1,t]=diff2(w2,m2,h);
alpha=k*(n1.*1-t.^2);
[Af,Bf]=matrf(alpha,n);
f = linsolve(Af,Bf);
f1=vec2matr(f,n+1);
[Afi,Bfi]=matrphi(f1,n);
fi = linsolve(Afi,Bfi);
fi1=vec2matr(fi,n+1);
[b,c,d]=diffFI(fi1,f1,h);
lamda=c.*1+b.*n1-2*d.*t;
lamda1=lamda(2:end-1,2:end-1);
end
function [w1]=vec2matr(w,n)
count=0;
for i=1:n
    for j=1:n
        w1(i,j)=w(j+count);
    end
    count=count+n;
end
end
function [Af,Bf]=matrphi(alp,n)
h=1./n;
Af=[];
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        A=zeros(n+1,n+1);
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<n+1)
            A(i-1,j-1)=1.0/20;
            A(i-1,j)=1.0/5;
            A(i-1,j+1)=1.0/20;
            A(i,j-1)=1.0/5;
            A(i,j)=-1.0;
            A(i,j+1)=1.0/5;
            A(i+1,j-1)=1.0/20;
            A(i+1,j)=1.0/5;
            A(i+1,j+1)=1.0/20;
        end
        a1=A';
        A1=a1(:)';
        Af=[Af;A1];
    end
end
for (i=1:(n+1)^2)
    if (Af(i,i)==0)
        Af(i,i)=-1;
    end
end
B=zeros(n+1,n+1);
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<n+1)
            B(i,j)=-h^2.0/240.0*(alp(i-1,j-1)+4.0*alp(i-1,j)+alp(i-
1,j+1)+4.0*alp(i,j-1)+52*alp(i,j)...
+4.0*alp(i,j+1)+alp(i+1,j-1)+4.0*alp(i+1,j)+alp(i+1,j+1));
        else
            B(i,j)=0;
        end
    end
end
end
bf=B';
Bf=bf(:);

```

```

end
function [Af,Bf]=matrf(alp,n)
h=1./n;
Af=[];
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        A=zeros(n+1,n+1);
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<n+1)
            A(i-1,j-1)=1.0/20;
            A(i-1,j)=1.0/5;
            A(i-1,j+1)=1.0/20;
            A(i,j-1)=1.0/5;
            A(i,j)=-1.0;
            A(i,j+1)=1.0/5;
            A(i+1,j-1)=1.0/20;
            A(i+1,j)=1.0/5;
            A(i+1,j+1)=1.0/20;
        end
        al=A';
        A1=al(:)';
        Af=[Af;A1];
    end
end
for (i=1:(n+1)^2)
    if (Af(i,i)==0)
        Af(i,i)=-1;
    end
end
B=zeros(n+1,n+1);
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<n+1)
            B(i,j)=h^2.0/240.0*(alp(i-1,j-1)+4.0*alp(i-1,j)+alp(i-
1,j+1)+4.0*alp(i,j-1)+52*alp(i,j)...
+4.0*alp(i,j+1)+alp(i+1,j-1)+4.0*alp(i+1,j)+alp(i+1,j+1));
        else
            B(i,j)=0;
        end
    end
end
bf=B';
Bf=bf(:);
end
function [AA,BB]=Matr(n,g1)
h=1./n;
AA=[];
g=g1;
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        A=zeros(n+1,n+1);
        Aw=zeros(n+1,n+1);
        if (i>1 && i<n+1) && (j>1 && j<n+1)
            A(i-1,j-1)=1.0/20.0;
            A(i-1,j)=1.0/5.;
            A(i-1,j+1)=1.0/20.;
            A(i,j-1)=1.0/5.;
            A(i,j)=-1;
            A(i,j+1)=1.0/5.;
            A(i+1,j-1)=1.0/20.;
            A(i+1,j)=1.0/5.;
            A(i+1,j+1)=1.0/20.;
        else
            if (i==1) && (j>1 && j<n+1)
                A(i,j-1)=0;
            end
        end
    end
end

```

```

A(i+1,j-1)=0;
A(i+2,j-1)=0;
A(i,j)=-1;
A(i+1,j)=0;
A(i+2,j)=0;
A(i,j+1)=0;
A(i+1,j+1)=0;
A(i+2,j+1)=0;
Aw(i+1,j-1)=0;
Aw(i+1,j)=0;
Aw(i+1,j+1)=0;
end
if (j==1) && (i>1 && i<n+1)
A(i-1,j)=-5.0/74.0;
A(i-1,j+1)=-8.0/74;
A(i-1,j+2)=1.0/74;
A(i,j)=-1;
A(i,j+1)=-56.0/74;
A(i,j+2)=10.0/74;
A(i+1,j)=-5.0/74;
A(i+1,j+1)=-8.0/74;
A(i+1,j+2)=1.0/74.0;
Aw(i-1,j+1)=-24.0/(37*h^2);
Aw(i,j+1)=-96.0/(37*h^2);
Aw(i+1,j+1)=-24.0/(37*h^2);
end
if (i==n+1) && (j>1 && j<n+1)
A(i,j-1)=0;
A(i-1,j-1)=0;
A(i-2,j-1)=0;
A(i,j)=-1;
A(i-1,j)=0;
A(i-2,j)=0;
A(i,j+1)=0;
A(i-1,j+1)=0;
A(i-2,j+1)=0;
Aw(i-1,j-1)=0;
Aw(i-1,j)=0;
Aw(i-1,j+1)=0;
end
if (j==n+1) && (i>1 && i<n+1)
A(i-1,j)=-5.0/74.0;
A(i-1,j-1)=-8.0/74;
A(i-1,j-2)=1.0/74;
A(i,j)=-1;
A(i,j-1)=-56.0/74;
A(i,j-2)=10.0/74;
A(i+1,j)=-5.0/74;
A(i+1,j-1)=-8.0/74;
A(i+1,j-2)=1.0/74.0;
Aw(i-1,j-1)=-24.0/(37*h^2);
Aw(i,j-1)=-96.0/(37*h^2);
Aw(i+1,j-1)=-24.0/(37*h^2);
end
end
a1=A';
A1=a1(:)';
a2=Aw';
A2=a2(:)';
A3=[A1,A2];
AA=[AA;A3];
end
end
for i=1:n+1

```

```

for j=1:n+1
    B=zeros(n+1,n+1);
    B2=zeros(n+1,n+1);
    if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<n+1)
        B(i-1,j-1)=1.0/20;
        B(i-1,j)=1.0/5;
        B(i-1,j+1)=1.0/20;
        B(i,j-1)=1.0/5;
        B(i,j)=-1;
        B(i,j+1)=1.0/5;
        B(i+1,j-1)=1.0/20;
        B(i+1,j)=1.0/5;
        B(i+1,j+1)=1.0/20;
        B2(i,j)=36*h^2/120.0;
    end
    b11=B';
    b22=B2';
    B1=b11(:)';
    B3=b22(:)';
    B4=[B3,B1];
    AA=[AA;B4];
end
end
for (i=1:2*(n+1)^2)
    if (AA(i,i)==0)
        AA(i,i)=-1;
    end
end
    Bm=zeros(n+1,n+1);
    Bw=zeros(n+1,n+1);
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<n+1)
            Bm(i,j)=-3.0*h^2.0*g(i,j)/10.0;
            Bw(i,j)=h^4/40*g(i,j);
        else
            Bm(i,j)=0;
            Bw(i,j)=0;
        end
    end
end
    b1=Bm';
    b2=Bw';
    BB1=b1(:);
    BB2=b2(:);
    BB=[BB1;BB2];
function [g11,w11]=findgw(g,lamda,w,q)
    [m,n]=size(g);
    w11=zeros(m,n);
    w22=zeros(m-2,n-2);
    kg=zeros(m,n);
    klambda=lamda./w.^3;
    gx=g(2:end-1,2:end-1);
    kg1=gx./w;
    for i=1:m-2
        for j=1:n-2
            sol=roots([klambda(i,j) 0 -kg1(i,j) q]);
            sol_real=sol;
            sol_real=sol(imag(sol)==0);
            solmax=max(sol_real(:));
            if (solmax<0)
                sol_real=sol;
            end
            w22(i,j)=min(abs(sol_real(:)));
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    w11(2:end-1,2:end-1)=w22;
    kg(2:end-1,2:end-1)=kg1;
    g11=kg.*w11;
end
function [b,c,d]=diffFI(w,m,h)
    [M,N]=size(w);
    for i=1:M
        for j=1:N
            if (i>1 && j>1 && i<M && j<N)
                b(i,j)=1.0/(2.0*h^2)*w(i-1,j)-1.0/(2.0*h^2)*w(i,j-1)-
1.0/(2.0*h^2)*w(i,j+1)+1.0/(2.0*h^2)*w(i+1,j)+1.0/20.0*m(i-1,j)-1.0/20.0*m(i,j-1)-
1.0/2.0*m(i,j)...
                    -1.0/20.0*m(i,j+1)+1/20.0*m(i+1,j);
                c(i,j)=-m(i,j)-b(i,j);
                d(i,j)=1.0/4.0/h^2*(w(i-1,j-1)-w(i-1,j+1)-w(i+1,j-1)+w(i+1,j+1));
            else
                b(i,j)=0;
                c(i,j)=0;
                d(i,j)=0;
            end
        end
    end
end
end

```

## Расчёт гибкой прямоугольной пластины на несплошном упругом

### основании

```

clear all;
n=8;
m=2*n;
h=1/n;
E=0.75*10^6.0;
a=10.0;
aa=2*a;
qr=0.5;
H=0.1;
muy=0.316;
D=E*H^3/(12*(1-muy^2));
k=E*H*a^2/D;
q=qr*a^3/D;
R1=2.15;
R2=0;
RR1=a^4.0*R1/D;
RR2=a^4.0*R2/D;
g=q*ones(n+1,m+1);
Delta=1000.0;
count=0;
mcount=[];
mdelta=[];
moment=[];
while (Delta>0.0001)
    % for i=1:l
    g0=g;
    [AA,BB,Af,l,n1,t,b,c,d,fi,mw,w2,w3,m2,lamda,lamda1]=solveee(n,m,g,h,k,RR1,RR2);
    g11,w11=findgw(g,lamda1,w3,q);
    g=(g0+g11)/2.0;
    Deltag=abs(g0-g);
    Delta=Deltag((n+2)/2,(m+2)/2);
end

```

```

        count=count+1;
        mcount=[mcount count];
        mdelta=[mdelta w1((n+2)/2,(m+2)/2)];
        moment=[moment m2((n+2)/2,(m+2)/2)];
    end
    [lshi,neta,tshieta]=diff2(w2,m2,h);
    mshi=-(lshi+neta.*muy);
    meta=-(neta+lshi.*muy);
    My=mshi.*D/a;
    Mx=meta.*D/a;
    plot(mcount,mdelta);
    [m1,n2]=meshgrid(1:m+1,1:n+1);
    mesh(m1,n2,-w1);
    title 'Diagram of deflection w';
    figure;
    plot(mcount,moment);
    [m1,n2]=meshgrid(1:m+1,1:n+1);
    mesh(m1,n2,-m2);
    figure;
    plot(mcount,moment);
    [m1,n2]=meshgrid(1:m+1,1:n+1);
    mesh(m1,n2,-Mx);
    title 'Diagram of bending moment Mx';
    figure;
    plot(mcount,moment);
    [m1,n2]=meshgrid(1:m+1,1:n+1);
    mesh(m1,n2,-My);
    title 'Diagram of bending moment My';
    figure;
    plot(mcount,mdelta);
    grid on;
    xlabel('number of iterative circle');
    ylabel('wmax (x10cm)');
function
[AA,BB,Af,l,n1,t,b,c,d,fi,mw,w2,w3,m2,lamda,lamda1]=solveee(n,m,g,h,k,RR1,RR2)
    [AA,BB]=Matr(n,m,g,RR1,RR2);
    mw = linsolve(AA,BB);
    moment=mw(1:(n+1)*(m+1));
    w=mw((n+1)*(m+1)+1:2*(n+1)*(m+1));
    m2=vec2matr(moment,n+1,m+1);
    w2=vec2matr(w,n+1,m+1);
    w3=w2(2:end-1,2:end-1);
    [l,n1,t]=diff2(w2,m2,h);
    alpha=k*(n1.*l-t.^2);
    [Af,Bf]=matrf(alpha,n,m);
    f = linsolve(Af,Bf);
    f1=vec2matr(f,n+1,m+1);
    [Afi,Bfi]=matrphi(f1,n,m);
    fi = linsolve(Afi,Bfi);
    fi1=vec2matr(fi,n+1,m+1);
    [b,c,d]=diffFI(fi1,f1,h);
    lamda=c.*l+b.*n1-2*d.*t;
    lamda1=lamda(2:end-1,2:end-1);
end
function [w1]=vec2matr(w,n,m)
    count=0;
    for i=1:n
        for j=1:m
            w1(i,j)=w(j+count);
        end
        count=count+m;
    end
end
function [AA,BB]=Matr(n,m,g1,RR1,RR2)

```



```

h=1./n;
AA=[];
g=g1;
for i=1:n+1
    for j=1:m+1
        A=zeros(n+1,m+1);
        Aw=zeros(n+1,m+1);
        if (i>1 && i<n+1) && (j>1 && j<m/2+1)
            A(i-1,j-1)=1.0/20.0;
            A(i-1,j)=1.0/5.;
            A(i-1,j+1)=1.0/20.;
            A(i,j-1)=1.0/5.;
            A(i,j)=-1;
            A(i,j+1)=1.0/5.;
            A(i+1,j-1)=1.0/20.;
            A(i+1,j)=1.0/5.;
            A(i+1,j+1)=1.0/20.;
            Aw(i-1,j-1)=-RR1*h^2.0/240;
            Aw(i-1,j)=-RR1*h^2.0/60;
            Aw(i-1,j+1)=-RR1*h^2.0/240;
            Aw(i,j-1)=-RR1*h^2.0/60;
            Aw(i,j)=-13*RR1*h^2.0/60;
            Aw(i,j+1)=-RR1*h^2.0/60;
            Aw(i+1,j-1)=-RR1*h^2.0/240;
            Aw(i+1,j)=-RR1*h^2.0/60;
            Aw(i+1,j+1)=-RR1*h^2.0/240;
        else
            if (i>1 && i<n+1) && (j>m/2+1 && j<m+1)
                A(i-1,j-1)=1.0/20.0;
                A(i-1,j)=1.0/5.;
                A(i-1,j+1)=1.0/20.;
                A(i,j-1)=1.0/5.;
                A(i,j)=-1;
                A(i,j+1)=1.0/5.;
                A(i+1,j-1)=1.0/20.;
                A(i+1,j)=1.0/5.;
                A(i+1,j+1)=1.0/20.;
                Aw(i-1,j-1)=-RR2*h^2.0/240;
                Aw(i-1,j)=-RR2*h^2.0/60;
                Aw(i-1,j+1)=-RR2*h^2.0/240;
                Aw(i,j-1)=-RR2*h^2.0/60;
                Aw(i,j)=-13*RR2*h^2.0/60;
                Aw(i,j+1)=-RR2*h^2.0/60;
                Aw(i+1,j-1)=-RR2*h^2.0/240;
                Aw(i+1,j)=-RR2*h^2.0/60;
                Aw(i+1,j+1)=-RR2*h^2.0/240;
            else
                if (i>1 && i<n+1) && (j==m/2+1)
                    A(i-1,j-1)=1.0/20.0;
                    A(i-1,j)=1.0/5.;
                    A(i-1,j+1)=1.0/20.;
                    A(i,j-1)=1.0/5.;
                    A(i,j)=-1;
                    A(i,j+1)=1.0/5.;
                    A(i+1,j-1)=1.0/20.;
                    A(i+1,j)=1.0/5.;
                    A(i+1,j+1)=1.0/20.;
                    Aw(i-1,j-1)=-RR1*h^2.0/240;
                    Aw(i-1,j)=- (RR1+RR2)*h^2.0/120;
                    Aw(i-1,j+1)=-RR2*h^2.0/240;
                    Aw(i,j-1)=-RR1*h^2.0/60;
                    Aw(i,j)=-13*(RR1+RR2)*h^2.0/120;
                    Aw(i,j+1)=-RR2*h^2.0/60;
                    Aw(i+1,j-1)=-RR1*h^2.0/240;
                end
            end
        end
    end
end

```



```

        a2=Aw';
        A2=a2(:)';
        A3=[A1,A2];
        AA=[AA;A3];
    end
end
for i=1:n+1
    for j=1:m+1
        B=zeros(n+1,m+1);
        B2=zeros(n+1,m+1);
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<m+1)
            B(i-1,j-1)=1.0/20;
            B(i-1,j)=1.0/5;
            B(i-1,j+1)=1.0/20;
            B(i,j-1)=1.0/5;
            B(i,j)=-1;
            B(i,j+1)=1.0/5;
            B(i+1,j-1)=1.0/20;
            B(i+1,j)=1.0/5;
            B(i+1,j+1)=1.0/20;
            B2(i,j)=36*h^2/120.0;
        end
        b11=B';
        b22=B2';
        B1=b11(:)';
        B3=b22(:)';
        B4=[B3,B1];
        AA=[AA;B4];
    end
end
for (i=1:2*(n+1)*(m+1))
    if (AA(i,i)==0)
        AA(i,i)=-1;
    end
end
    Bm=zeros(n+1,m+1);
    Bw=zeros(n+1,m+1);
for i=1:n+1
    for j=1:m+1
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<m+1)
            Bm(i,j)=-3.0*h^2.0*g(i,j)/10.0;
            Bw(i,j)=h^4/40*g(i,j);
        else
            Bm(i,j)=0;
            Bw(i,j)=0;
        end
    end
end
    b1=Bm';
    b2=Bw';
    BB1=b1(:);
    BB2=b2(:);
    BB=[BB1;BB2];
function [g11,w11]=findgw(g,lamda,w,q)
    [m,n]=size(g);
    w11=zeros(m,n);
    w22=zeros(m-2,n-2);
    kg=zeros(m,n);
    klambda=lamda./w.^3;
    gx=g(2:end-1,2:end-1);
    kg1=gx./w;
    for i=1:m-2
        for j=1:n-2
            sol=roots([klambda(i,j) 0 -kg1(i,j) q]);

```

```

        sol_real=sol;
        sol_real=sol(imag(sol)==0);
        solmax=max(sol_real(:));
        if (solmax<0)
            sol_real=sol;
        end
        end
        w22(i,j)=min(abs(sol_real(:)));
    end
    end
    w11(2:end-1,2:end-1)=w22;
    kg(2:end-1,2:end-1)=kg1;
    g11=kg.*w11;
end
function [l,n,t]=diff2(w,m,h)
    [M,N]=size(w);
    for i=1:M
        for j=1:N
            if (i>1 && j>1 && i<M && j<N)
                l(i,j)=1.0/(2.0*h^2)*w(i-1,j)-1.0/(2.0*h^2)*w(i,j-1)-
                1.0/(2.0*h^2)*w(i,j+1)+1.0/(2.0*h^2)*w(i+1,j)+1.0/20.0*m(i-1,j)-1.0/20.0*m(i,j-1)-
                1.0/2.0*m(i,j)...
                -1.0/20.0*m(i,j+1)+1/20.0*m(i+1,j);
                n(i,j)=-m(i,j)-l(i,j);
                t(i,j)=1.0/4.0/h^2*(w(i-1,j-1)-w(i-1,j+1)-w(i+1,j-1)+w(i+1,j+1));
            else
                if (i==1 && j>1 && j<N)
                    l(i,j)=-m(i,j);
                    n(i,j)=0;
                    t(i,j)=0;
                end
                if (i==M && j>1 && j<N)
                    l(i,j)=-m(i,j);
                    n(i,j)=0;
                    t(i,j)=0;
                end
                if (j==1 && i>1 && i<M)
                    l(i,j)=0;
                    n(i,j)=-m(i,j);
                    t(i,j)=0;
                end
                if (j==N && i>1 && i<M)
                    l(i,j)=0;
                    n(i,j)=-m(i,j);
                    t(i,j)=0;
                end
            end
        end
    end
end
end
function [Af,Bf]=matrf(alp,n,m)
    h=1./n;
    Af=[];
    for i=1:n+1
        for j=1:m+1
            A=zeros(n+1,m+1);
            if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<m+1)
                A(i-1,j-1)=1.0/20;
                A(i-1,j)=1.0/5;
                A(i-1,j+1)=1.0/20;
                A(i,j-1)=1.0/5;
                A(i,j)=-1.0;
                A(i,j+1)=1.0/5;
                A(i+1,j-1)=1.0/20;
                A(i+1,j)=1.0/5;
            end
        end
    end
end

```

```

        A(i+1,j+1)=1.0/20;
    end
    a1=A';
    A1=a1(:)';
    Af=[Af;A1];
end
end
for (i=1:(n+1)*(m+1))
    if (Af(i,i)==0)
        Af(i,i)=-1;
    end
end
B=zeros(n+1,n+1);

for i=1:n+1
    for j=1:m+1
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<m+1)
            B(i,j)=h^2.0/240.0*(alp(i-1,j-1)+4.0*alp(i-1,j)+alp(i-
1,j+1)+4.0*alp(i,j-1)+52*alp(i,j)...
+4.0*alp(i,j+1)+alp(i+1,j-1)+4.0*alp(i+1,j)+alp(i+1,j+1));
        else
            B(i,j)=0;
        end
    end
end
bf=B';
Bf=bf(:);
end
function [Af,Bf]=matrphi(alp,n,m)
h=1./n;
Af=[];
for i=1:n+1
    for j=1:m+1
        A=zeros(n+1,m+1);
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<m+1)
            A(i-1,j-1)=1.0/20;
            A(i-1,j)=1.0/5;
            A(i-1,j+1)=1.0/20;
            A(i,j-1)=1.0/5;
            A(i,j)=-1.0;
            A(i,j+1)=1.0/5;
            A(i+1,j-1)=1.0/20;
            A(i+1,j)=1.0/5;
            A(i+1,j+1)=1.0/20;
        end
        a1=A';
        A1=a1(:)';
        Af=[Af;A1];
    end
end
for (i=1:(n+1)*(m+1))
    if (Af(i,i)==0)
        Af(i,i)=-1;
    end
end
B=zeros(n+1,m+1);
for i=1:n+1
    for j=1:m+1
        if (i>1 && i<n+1)&&(j>1 && j<m+1)
            B(i,j)=-h^2.0/240.0*(alp(i-1,j-1)+4.0*alp(i-1,j)+alp(i-
1,j+1)+4.0*alp(i,j-1)+52*alp(i,j)...
+4.0*alp(i,j+1)+alp(i+1,j-1)+4.0*alp(i+1,j)+alp(i+1,j+1));
        else
            B(i,j)=0;
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
    bf=B';
    Bf=bf(:);
end
function [b,c,d]=diffFI(w,m,h)
    [M,N]=size(w);
    for i=1:M
        for j=1:N
            if (i>1 && j>1 && i<M && j<N)
                b(i,j)=1.0/(2.0*h^2)*w(i-1,j)-1.0/(2.0*h^2)*w(i,j-1)-
1.0/(2.0*h^2)*w(i,j+1)+1.0/(2.0*h^2)*w(i+1,j)+1.0/20.0*m(i-1,j)-1.0/20.0*m(i,j-1)-
1.0/2.0*m(i,j)...
                    -1.0/20.0*m(i,j+1)+1/20.0*m(i+1,j);
                c(i,j)=-m(i,j)-b(i,j);
                d(i,j)=1.0/4.0/h^2*(w(i-1,j-1)-w(i-1,j+1)-w(i+1,j-1)+w(i+1,j+1));
            else
                b(i,j)=0;
                c(i,j)=0;
                d(i,j)=0;
            end
        end
    end
end
end

```